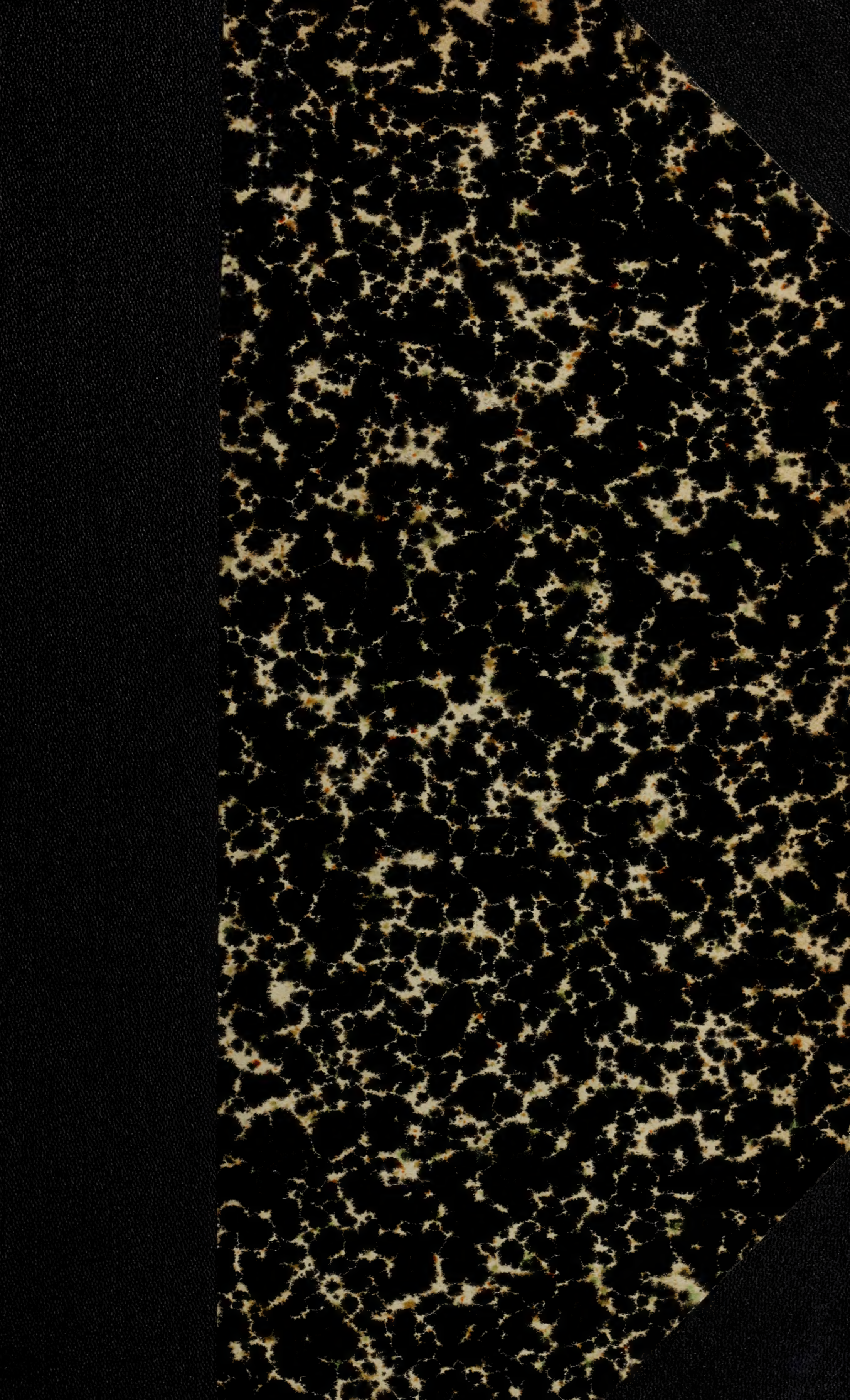
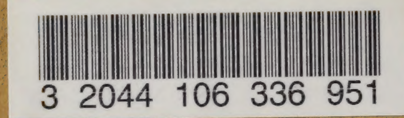



3 2044 106 336 951

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES à HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

J. BOSSCHA,

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLOBORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buys Ballot, C. K. Hoffmann** et **J. M. van Bemmelen.**

TOME XXII.

HAARLEM,
LES HERITIERS LOOSJES.
1888.

TABLE DES MATIÈRES.

PROGRAMME

DE LA

Société hollandaise des sciences, à Harlem.

ANNÉE 1887.

La Société hollandaise des sciences a tenu, le 21 mai 1887, sa cent-trente-cinquième assemblée générale.

Le Directeur-Président, Jhr. J. W. M. Schorer, ouvre la séance par une allocution dans laquelle, après avoir rendu hommage à la mémoire de MM. C. M. van der Sande Lacoste, membre national, A. W. Eichler, de Berlin, et B. Studer, de Berne, membres étrangers, dont la Société a eu à déplorer la perte depuis sa dernière réunion, il souhaite la bienvenue à MM. les directeurs E. N. Rahusen et J. de Clercq van Weel, ainsi qu'à MM. les membres D. J. Korteweg et M. F. A. G. Campbell, qui assistent pour la première fois à une séance de la Société.

Le Président mentionne ensuite que, dans l'année écoulée, les livraisons 1 à 4 du tome XXI des *Archives néerlandaises* ont été envoyées aux membres et aux Sociétés correspondantes. La cinquième livraison, qui complètera ce volume, est sous presse. L'ouvrage de M. Ed. Everts, *Nieuwe Naamlijst van Nederlandsche Schildvleugelige Insecten* (Nouveau Catalogue des Coléoptères de la Néerlande) est tiré et prêt à être mis en

distribution. Il forme le 4me et dernier fascicule du Tome IV des *Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen*, 3de *Verzameling*. Des *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* les 35 premières feuilles sont tirées et la quarantième feuille est déjà livrée à l'impression.

Un Mémoire, portant pour devise:

„*In nature's infinite book of secrecy a little we can read*",

a été reçu en réponse à l'une des questions mises au concours jusqu'au 1er janvier 1887, savoir, à celle inscrite sous le n° V et formulée en ces termes; „On demande une étude systématique, organogénique et biologique des parasites végétaux attachés aux poils du Paresseux (*Bradypus*)".

Les commissaires chargés de l'examen de ce travail ayant émis un avis favorable, l'Assemblée, sur la proposition de MM. les Directeurs, décerne à l'unanimité la médaille d'or à l'auteur:

Madame A. WEBER, née VAN BOSSE, à Amsterdam.

Suivant l'usage, la médaille d'argent est attribuée au membre par qui la question avait été proposée, M. C. A. J. A. OUDEMANS.

Après avoir adopté quelques nouveaux sujets de prix, l'Assemblée, sur la présentation des Directeurs, nomme membre national: M. W. N. DU RIEU, à Leiden.

QUESTIONS MISES AU CONCOURS.

Jusqu'au 1er janvier 1888.

I. La Société demande des recherches concernant l'origine et le développement des cellules sexuelles dans quelques classes d'animaux, vertébrés et invertébrés.

II. Il a été reconnu, comme le faisaient prévoir des considérations théoriques, que les chaleurs moléculaires de plu-

sieurs combinaisons du carbone, à l'état solide, s'écartent de la formule de Kopp:

$$C \times 1{,}8 + H \times 2{,}3 + O \times 4 + x \times 6{,}4.$$

On demande, en conséquence, de déterminer la chaleur moléculaire d'un assez grand nombre de combinaisons carbonées à l'état solide, et de rechercher le lien qui existe entre les écarts de la formule de Kopp et certaines causes particulières, bien spécifiées.

III. L'action que M. Hall a découverte entre l'aimant et le courant électrique est regardée par quelques physiciens comme un phénomène secondaire, tandis que d'autres attribuent à l'expérience de Hall une signification plus haute, eu égard surtout à la théorie électro-magnétique de la lumière.

La Société demande une étude, expérimentale ou théorique, jetant plus de jour sur le phénomène lui-même ou sur la question de savoir jusqu'à quel point il est en rapport avec la rotation électro-magnétique du plan de polarisation.

IV. Bien qu'on puisse établir les équations du mouvement des gaz en y tenant compte de différentes circonstances, — telles que le frottement interne, etc. — l'intégration de ces équations rencontre souvent des difficultés. C'est ainsi, par exemple, que les résultats simples obtenus par M. Strouhal (*Wied. Ann.* V), relativement aux tons engendrés lorsqu'un corps se meut rapidement dans l'air, ne sont pas encore expliqués théoriquement.

La Société demande donc, sur le mouvement des gaz, un travail donnant une extension à la théorie générale, ou soumettant à un calcul rigoureux quelque phénomène auquel pareil traitement n'ait pas encore été appliqué.

V. D'après certaines considérations sur les phénomènes thermo-électriques, deux morceaux d'un même métal, qui diffèrent en température, doivent au contact l'un de l'autre montrer une différence de potentiel électrique, même lorsque par échauffement ou refroidissement le métal ne subit aucune

modification permanente et qu'à une même température il possède toujours les mêmes propriétés. Suivant une autre manière de voir, il n'y a aucune raison théorique pour l'existence de cette différence de potentiel électrique.

La Société demande des expériences propres à éclairer la question.

Jusqu'au 1er janvier 1889.

I. La Société demande des recherches sur la structure et l'histoire du développement de une ou plusieurs espèces d'animaux invertébrés n'ayant pas été étudiées jusqu'ici, ou ne l'ayant été que d'une manière incomplète.

II. La Société demande une Flore des Phanérogames et des Cryptogames vasculaires de la Néerlande, composée sur un plan analogue à celui de l'ouvrage de Hooker: „*The students Flora of the Britsh Islands.*"

III. Donner un aperçu critiqne, d'après les meilleures sources, de toutes les Phanérogames et Cryptogames de la Flore néerlandaise.

IV. Faire la monographie des espèces indigènes de l'une des familles de plantes qui sont le mieux représentées dans notre pays (Ombellifères, Synanthérées, Papilionacées, Cypéracées, Graminées).

V. Soumettre à une étude scientifique les causes du *bleu* des fromages d'Edam et les conditions qui régissent la propagation de cette maladie.

VI. On demande un exposé critique de toutes les recherches faites sur les processus où de l'oxygène est fixé dans le corps de la plante, ainsi qu'une étude quantitative du rapport qui existe entre les produits de cette fixation et les matières transformées.

VII. Faire une étude quantitative de l'influence de la tem-

pérature sur la vitesse de différents phénomènes de la vie végétale.

VIII. Etudier expérimentalement la manière dont les principes nutritifs organiques sont charriés dans les plantes.

IX. Les recherches de M. HAGA (*Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft,* Tome I, p. 145 et Tome III p. 43) ont montré la possibilité de déterminer quantitativement la convection électrique de la chaleur dans les conducteurs („l'effet de THOMSON") et la manière dont elle dépend de la température. La Société demande des mesures faisant connaître ces actions dans des métaux autres que ceux étudiés par M. HAGA.

X. Soumettre la loi des états correspondants, trouvée par M. VAN DER WAALS (*Verhandelingen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen,* Tome XX, 1880), au contrôle des données expérimentales obtenues jusqu'ici sur l'état limite des gaz et des liquides, sur les coefficients de dilatation, de compression et de capillarité, le frottement et la conductibilité thermique des gaz et des liquides, ainsi que sur la chaleur latente.

XI. Beaucoup de physiciens et de chimistes se sont occupés de déterminer les coefficients de réfraction des matières transparentes à réfraction simple, pour vérifier soit les relations proposées jusqu'ici entre la réfraction et la densité, soit les théories de la dispersion, ou bien pour tâcher de découvrir quelque rapport entre le coefficient de réfraction et la composition chimique.

La Société demande que les résultats de ces recherches soient coordonnés et discutés, de manière à faire nettement ressortir ce qui paraît définitivement acquis.

XII. Il y a quantité de phénomènes acoustiques dont la théorie ne peut encore être jugée achevée. Tels sont : la propagation d'ondes sonores d'amplitude finie, la production de tons de combinaison, les battements perçus lors de l'émission simultanée de deux tons simples entre lesquels il existe presque un intervalle harmonique, l'entrée en vibration d'un corps

sonore en présence d'un autre qui donne un ton harmonique plus grave, etc.

La Société demande des recherches théoriques propres à étendre notre connaissance du mouvement sonore, soit en ce qui conserve les phénomènes cités, soit par rapport à d'autres, analogues.

XIII. Etudier l'influence que l'observation des diagonales d'un réseau de triangles exerce sur l'exactitude du résultat final, et en déduire comment, à raison de cette influence, on doit répartir les observations sur les différents points et les différentes directions, pour atteindre, avec un même nombre de mesures, en différents cas, le plus haut degré d'exactitude.

La Société recommande aux concurrents d'abréger autant que possible leurs mémoires, en omettant tout ce qui n'a pas un rapport direct avec la question proposée. Elle désire que la clarté soit unie à la concision, et que les propositions bien établies soient nettement distinguées de celles qui reposent sur des fondements moins solides.

Elle rappelle, en outre, qu'aucun mémoire écrit de la main de l'auteur ne sera admis au concours, et que même, une médaille eût-elle été adjugée, la remise n'en pourrait avoir lieu, si la main de l'auteur venait à être reconnue, entretemps, dans le travail couronné.

Les plis cachetés des mémoires non couronnés seront détruits sans avoir été ouverts, à moins que le travail présenté ne soit qu'une copie d'ouvrages imprimés, auquel cas le nom de l'auteur sera divulgué.

Tout Membre de la Société a le droit de prendre part au concours, à condition que son mémoire, ainsi que le pli, soient marqués de la lettre L.

Le prix offert pour une réponse satisfaisante à chacune des questions proposées, consiste, au choix de l'auteur, en une

médaille d'or frappée au coin ordinaire de la Société et portant le nom de l'auteur et le millésime, ou en une somme de *cent-cinquante florins*; une prime supplémentaire de *cent-cinquante florins* pourra être accordée si le mémoire en est jugé digne.

Le concurrent qui remportera le prix ne pourra faire imprimer le mémoire couronné, soit séparement, soit dans quelque autre ouvrage, sans en avoir obtenu l'autorisation expresse de la Société.

Les mémoires, écrits lisiblement, en *hollandais*, *français*, *latin*, *anglais*, *italien* ou *allemand* (mais non en caractères allemands), doivent être accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom de l'auteur, et envoyés franco au Secrétaire de la Société, le professeur J. Bosscha, à Harlem.

TOME XXII. 1re Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

J. BOSSCHA,
SECRÉTAIRE DE LA SOCIÉTÉ,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot, C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1887.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LES COULEURS NON VERTES DES FEUILLES

ET LEUR SIGNIFICATION POUR LA DÉCOMPOSITION DE L'ACIDE CARBONIQUE SOUS L'INFLUENCE DE LA LUMIÈRE;

PAR

TH. W. ENGELMANN.

(Avec les planches I et II.)

La question de savoir dans quelle mesure les différents groupes de rayons du spectre prennent part à la décomposition de l'acide carbonique dans les organes assimilants des plantes peut être résolue soit d'une manière directe, en étudiant l'effet assimilateur de chaque groupe de rayons, soit indirectement, par voie d'exclusion, en examinant quels groupes peuvent manquer sans que l'assimilation cesse d'avoir lieu. Depuis les recherches de Draper, l'expérimentation a procédé surtout par la première de ces deux voies, dont les avantages sont manifestes. Mais il est instructif aussi de suivre la seconde, comme on l'avait déjà fait antérieurement à maintes reprises, et comme je vais l'essayer de nouveau, pour un cas très caractéristique.

Sur sa route depuis l'espace céleste jusqu'aux éléments organiques assimilateurs, la lumière solaire éprouve une série d'absorptions, qui, différentes en général pour des plantes différentes, et même pour des parties assimilatrices différentes d'une plante donnée, sont cause que la composition des ra-

diations, auxquelles incombe finalement la décomposition de l'acide carbonique dans les corps chromophylliens, présente, par rapport à celle de la lumière originelle, les écarts les plus variés.

A l'absorption par l'atmosphère, qui, à la fois quantitativement et qualitativement, est autre suivant que les plantes vivent à de grandes hauteurs ou au fond des vallées, sous un ciel constamment serein ou dans un climat brumeux, entre les tropiques ou plus près des pôles, à cette absorption atmosphérique, dis-je, vient s'ajouter, pour la flore submergée, l'absorption par l'eau. Celle-ci également varie avec la profondeur, et, selon l'espèce de l'eau, elle atteint à un degré différent les différentes parties du spectre. Dans l'onde bleue et limpide des grandes mers et de beaucoup de lacs, les rayons verts, bleus et violets pénètrent bien plus profondément que les rayons rouges, lesquels par contre, dans des eaux troubles et de coloration rougeâtre, subissent sans doute, proportionnellement, un affaiblissement moindre.

A profondeur égale au-dessous de la surface de l'eau, les plantes vivant dans des grottes qui, comme celle de Capri, ne sont guère éclairées qu'à travers une épaisse couche liquide, reçoivent une lumière dont la composition n'est pas la même qu'au dehors; autre aussi est la lumière suivant que les plantes habitent des rochers sous-marins ombreux, inclinés au nord, ou qu'elles végètent sur des parois toutes semblables, mais tournées vers le soleil.

C'est principalement à cette circonstance que j'ai cherché à ramener, il y a quelques années, la distribution différente des Algues marines différemment colorées, plus particulièrement le fait qu'à des profondeurs croissantes les formes vertes disparaissent les premières, les formes rouges les dernières, et qu'en général les formes rouges dominent dans tous les lieux, — bas-fonds, grottes bleues et vertes, déclivités sous-marines abruptes et ombreuses, — où il n'arrive que de la lumière à peu près dépouillée de ses rayons rouges.

La méthode des bactéries m'avait appris que, dans tous les cas, une lumière mélangée complémentaire de la couleur propre de la chromophylle assimilatrice, par conséquent une lumière rouge pour les cellules vertes et une lumière verte pour les cellules rouges, est la plus efficace au point de vue de la décomposition de l'acide carbonique. D'après cela, il n'y avait rien que de naturel à ce que, partout où la lumière incidente est privée des rayons rouges, les formes rouges l'emportent dans la lutte pour l'existence.

De simples différences dans l'énergie totale de la lumière en action, abstraction faite de sa couleur, ne suffisaient pas à expliquer les faits ci-dessus rappelés, encore que l'influence de pareilles différences ne doive nullement être niée. On sait que de nombreuses formes vertes prospèrent admirablement à une lumière blanche très affaiblie; d'un autre côté, la présence de rayons rouges d'une énergie absolument et relativement élevée ne trouble pas nécessairement le développement de la chromophylle, comme le prouve la rencontre fréquente et même la prédominance locale des Rhodophycées à la surface de la mer.

D'autres circonstances, telles que la température, le mouvement, la pression, le degré de salure ou quelque autre propriété chimique de l'eau, la nature du sol, etc., ne fournissent pas davantage la base d'une explication satisfaisante, bien qu'elles aussi jouent incontestablement un rôle dans certains cas; il semble donc que l'idée d'attribuer à la couleur des rayons la plus forte part de responsabilité dans la distribution dont il s'agit, non-seulement soit permise, mais s'impose à l'esprit.

Les recherches récentes n'ont pas fait connaître de faits dont on puisse déduire une objection contre cette idée. Elle est en accord explicite avec la distribution trouvée par M. Karl Brandt [1]) pour les Algues à chromophylle vivant en

[1]) Karl Brandt, *Ueber die morphol. u. physiol. Bedeutung des Chlorophylls bei Thieren*, 2e *Abth.*, dans *Mittheil. a.d. zool, Station zu Neapel*, IV, p. 296 (1883).

parasites. D'après lui, „les Zooxanthelles *vert-jaunâtre* ou *jaune* pur se rencontrent exclusivement dans des animaux qui se tiennent à la surface de la mer, tels que les Radiolaires, les Siphonophores, les Rhizostomes, les Globigérines, — les Zooxanthelles *brunes* dans des animaux vivant à une faible profondeur, Actinies, etc., — enfin des Algues *rouges* dans des Spongiaires qui habitent à des profondeurs relativement notables (Myxilla à 13—35 m)". Dans le lac de Genève, renommé pour la teinte vert-bleuâtre de ses eaux, les formes vertes ne pénètrent, d'après une communication que M. le professeur F. A. Forel, de Morges, a eu l'obligeance de me faire, qu'à une faible profondeur: „au delà de 25 mètres, plus trace de plantes vertes". Les formes rouges et brun-jaunâtre, distinguées par la forte absorption des rayons plus réfrangibles, descendent au contraire jusqu'à 50—60 m, les Diatomées encore plus bas, jusqu'à 100 m [1]).

En tout cas, du fait que beaucoup de Rhodophycées (et Diatomées) vivent et prospèrent sous l'influence exclusive d'une lumière à peu près complètement dépourvue des rayons moins réfrangibles, il suit que ce doivent alors être les rayons plus réfrangibles qui opèrent la décomposition de l'acide carbonique. De là résultait à son tour la preuve, d'abord, que les rayons rouges ne sont pas indispensables au développement des plantes en général, comme le voulait entre autres Paul Bert; ensuite, que le pouvoir d'assimiler le carbone sous l'action de la lumière n'appartient pas en propre, comme on l'affirme encore fréquemment, à la matière colorante verte qui apparaît d'ordinaire lorsqu'on tue les chromoplastes rouges et brun-jaunâtre, et qui ressemble tout à fait à la matière colorante chlorophylliene (cyanophylle de G. Kraus, chlorophylline

[1]) Il est à regretter que, dans les expéditions grandioses faites récemment pour l'exploration des abysses de la mer, aucune attention n'ait été accordée à la question du changement de composition de la lumière aux niveaux successifs, en rapport avec la distribution en profondeur d'organismes à contenu chromophyllien de coloration différente.

de Timirjazeff, *Reinchlorophyll* de Tschirch, etc.) qu'on peut extraire des celulles vertes; à plus forte raison, ce pouvoir assimilateur n'est il pas, dans la chlorophylle, comme M. Reinke a cherché à le rendre plausible, le privilège spécial d'un groupe atomique hypothétique, qui se distinguerait par la forte absorption des rayons compris entre les raies B et C du spectre.

Les faits rappelés venaient plutôt à l'appui de cette proposition, bientôt confirmée par mes mesures comparatives de la grandeur de l'absorption et de l'action assimilatrice chez des cellules vertes, brunes, rouges et vert-bleuâtre, que l'absorption et l'action réductrice de la lumière, dans les corps chromophylliens des plantes, sont en général proportionnelles l'une à l'autre.

Il m'a paru que, dans cette même direction, des éclaircissements pourraient être obtenus de l'étude des feuilles diversement colorées de certaines plantes terrestres. Comme on le sait depuis longtemps, la coloration qui chez ces feuilles masque celle de la chlorophylle provient, en général, de matières colorantes non vertes dissoutes dans le suc cellulaire. Ces matières, partout où la lumière ne peut arriver à la chlorophylle qu'en les traversant, doivent jouer, en vertu de leur absorption élective, un rôle analogue à celui que l'eau bleue de la mer remplit pour les plantes submergées. Au cas où elles seraient capables, comme cette eau, d'absorber complètement certains groupes de rayons avant leur entrée dans les corps chromophylliens assimilateurs, il en résulterait immédiatement quelles longueurs d'onde ne participent pas, en pareil cas, à l'action assimilatrice; or ce résultat, combiné avec l'étude des corps chromophylliens correspondants, et en particulier avec celle de leurs propriétés optiques, devait à son tour avoir de l'importance pour la solution de la question concernant le rapport entre l'absortion et l'action assimilatrice de la lumière.

Au point de vue que je viens d'indiquer, les feuilles colo-

rées et leurs matières colorantes n'ont encore été l'objet d'aucune recherche, bien que l'utilité d'une semblable investigation ait dû se faire sentir plus d'une fois. [1]) L'obstacle principal résidait sans doute dans l'impossibilité d'effectuer séparément l'analyse spectrale quantitative des diverses matières colorantes qui se trouvent, l'une à côté de l'autre, dans les cellules des plantes. Cette difficulté, j'ai pu la surmonter à l'aide du photomètre microspectral décrit antérieurement [2]), qui, non seulement pour le problème actuel, mais aussi pour la question de l'éclairement interne des tissus en général, permet un examen quantitatif descendant jusqu'aux derniers éléments morphologiques visibles.

Il s'agissait en premier lieu de rechercher, pour un choix de feuilles colorées aussi riche que possible, la cause de leur coloration. Là où une matière colorante particulière se laissait reconnaître comme cause, il fallait examiner comment elle était répandue dans la feuille, étudier sa distribution par rapport à la lumière incidente et aux organes élémentaires assimilateurs, enfin mesurer directement sur les cellules vivantes, au moyen du photomètre microspectral, son pouvoir d'absorption. Concurremment, il y avait à tenir compte de la structure et de l'arrangement des cellules assimilatrices, de la répartition, du nombre, du volume et surtout de la couleur de leurs grains chlorophylliens, et à comparer sous ces divers rapports, lorsque la nature de l'objet s'y prêtait, les différentes parties d'une même feuille, pourvues ou dépourvues de matière colorante, vertes ou colorées. Pour cet examen, mon collègue M. Rauwenhoff a mis amicalement à ma disposition les ressources du Jardin et de l'Institut botaniques d'Utrecht.

---

[1]) Voir, par exemple, G. Berthold, *Beiträge zur Morphologie u. Physiologie der Meeresalgen*, dans Pringsheim *Jahrb.*, XIII 1882, p. 712.

[2]) *Onderzoekingen* etc. (3) IX, 1884, p. 1, *Arch. néerl.*, t. XIX, 1884, p. 186; *Botan. Zeit*, 1884. — L'appareil est fourni par M. Carl Zeiss, de Jena, au prix de 480 Marks.

II. Examen des couleurs des feuilles colorées.

D'après le but de mes recherches, indiqué au commencement de ces pages, elles ne devaient porter essentiellement que sur des feuilles en pleine végétation sous des conditions normales. Un examen également minutieux n'était pas réclamé par les changements de couleur qui accompagnent la destruction partielle ou totale de l'appareil chlorophyllien et la suppression de l'activité assimilatrice; tels sont, par exemple, la coloration automnale des feuilles caduques, les teintes hibernales des feuilles persistantes, les altérations chromatiques déterminées par des parasites animaux ou végétaux, par une insolation excessive ou par d'autres influences nuisibles On pouvait négliger tout à fait le jaunissement des plantes étiolées, la chlorose due au manque de fer, ainsi que les innombrables cas, dits d'albinisme, dans lesquels un dessin ou coloration blanchâtre est déterminé par l'absence partielle ou totale de chlorophylle, comme chez beaucoup de graminées rubanées, chez certaines variétés d'une foule de plantes supérieures (*Acer*, *Hedera*, *Aesculus*, *Pelargonium*, etc.), ou par un feutrage de poils blancs, une couche de résine, d'air, ou quelque autre revêtement, qui masque la chlorophylle sous-jacente. Il n'y avait pas à s'occuper non plus, bien entendu, des modifications passagères de la coloration, qui chez nombre de feuilles apparaissent à la suite de variations dans l'intensité de l'éclairage et qui ne dépendent que d'un changement de forme ou de lieu des chromoplastes.

Abstraction faite de tous ces cas, une coloration autre que la teinte verte typique de la chlorophylle peut encore provenir d'au moins deux causes essentiellement différentes: elle peut être due soit à une coloration anormale des corps chromophylliens assimilateurs, soit à ce que, outre les chromoplastes colorés normalement ou anormalement, il existe encore dans la feuille des matières colorantes particulières.

Dans le premier cas, à en juger par mes observations, la couleur est invariablement claire et toujours jaune pur ou vert-jaunâtre, avec tous les passages du jaune pur au vert chlorophyllien typique; dans le second, elle est en général brunrougeâtre, le plus souvent brun pourpre, passant au rouge pourpre ou au violet.

Des faits de la première catégorie, qui au total sont de nature assez complexe, il ne sera parlé que brièvement. Pour pouvoir être utilisés convenablement dans la question qui nous occupe, ils exigeraient une étude très approfondie, qui présenterait de grandes difficultés et que je ne suis malheureusement pas en état de leur consacrer. Au reste, même examinés superficiellement, ils sont déjà, à plusieurs égards, des plus instructifs. En premier lieu, ils fournissent la preuve que la coloration verte du monde végétal n'est pas due, en général, à une matière colorante unique, mais à un mélange de plusieurs matières de ce genre. Quant à savoir si celles-ci ne sont qu'au nombre de deux, comme on l'admet assez généralement aujourd'hui, surtout d'après les résultats des expériences connues de Gregor Kraus et des recherches postérieures qui s'y rattachent, — c'est une question qui reste provisoirement indécise. En tout cas, ce doit être un mélange d'*au moins* deux matières colorantes.

Il n'est pas posible, en effet, d'expliquer tous les tons de couleur, du vert pur au jaune, que présentent les feuilles des plantes en végétation normale, par des chromoplastes inégalement saturés d'une seule et même matière colorante, ou par de simples différences dans le nombre, le volume, la forme et l'arrangement des corps chlorophylliens, ou par des différences dans le pouvoir absorbant des membranes cellulaires, du protoplasma ou du suc cellulaire. Cela est spécialement impossible dans les nombreux cas où, la végétation ayant lieu sous des conditions entièrement normales, la couleur du tissu assimilateur est le jaune pur; c'est ce qu'on voit, entre autres, chez beaucoup de variétés de végétaux d'ornement,

ordinairement désignées dans les catalogues des horticulteurs, comme „*var. aurea*" ou „*foliis aureis*".

Il y a plusieurs années déjà, de nombreuses analyses chromatiques quantitatives, faites au moyen du photomètre microspectral sur des cellules végétales *vivantes*, m'ont convaincu que la marche de la courbe de l'absorption, rapportée à l'échelle des longueurs d'onde prises pour abscisses, peut, même chez des cellules de la même espèce végétale, vertes, tout à fait normales d'aspect, végétant vigoureusement dans les mêmes conditions, et semblables aussi en apparence sous tous les autres rapports, présenter des différences assez notables, qui ne s'expliquent ni par des erreurs de mesure, ni par rien d'autre que des différences de composition de la matière colorante des grains chromophylliens vivants.

Comparez les fig. 1 *a* et 1 *b*, Pl. I (d'aprés Tableau I, 1 *a* et 1 *b*), qui représentent la marche de l'absorption dans deux cellules vivantes de *Vaucheria*, normales d'aspect et, à une petite différence de couleur près, pareilles l'une à l'autre. Les ordonnées donnent, en centièmes de la lumière incidente (à peu près perpendiculaire), les intensités de la lumière transmise. Ce sont ici, comme dans la plupart des autres cas, les régions orange et bleue qui présentent les différences relativement les plus fortes.

Fréquemment il suffit, pour expliquer ces différences, d'admettre un mélange, en proportions diverses, de deux matières colorantes: l'une jaune, absorbant très peu le rouge, l'orangé et le jaune, très fortement le bleu, et pouvant donc correspondre à la xanthophylle de Kraus; l'autre verte, caractérisée par une forte absorption du rouge et aussi de l'orangé, avec un affaiblissement beaucoup moindre du bleu, et qui correspondrait donc à peu près à la cyanophylle de Kraus, à la chlorophylline de Timirjazeff, ou au *Reinchlorophyll* de Tschirch. C'est ainsi, par exemple, qu'un contenu plus abondant de xanthophylle dans la cellule 1*a* expliquerait pourquoi la courbe fig. 1 *a*, comparée à fig. 1 *b*, malgré une absorption

notablement moindre dans le rouge, l'orangé et le jaune (de λ 0,66 μ à 0.58 μ), accuse un affaiblissement plus grand du bleu (à partir de λ 0,47 μ).

Ailleurs cette hypothèse la plus simple ne semble pas suffisante, et il faut alors admettre la présence d'au moins une troisième matière colorante, dont les caractères spectroscopiques paraissent être souvent ceux de la chlorophyllane (fig. 2, tabl. II, 2).

Dans le plus grand nombre des cas, au reste, il y a un accord optique très remarquable entre les cellules vertes, même entre celles de plantes appartenant à des espèces et à des genres tout à fait différents. Fréquemment, les différences observées tombent toutes, ou du moins presque toutes, entre les limites des erreurs de l'observation. La fig. 3, *a* et *b* (tabl. I, 3, *a* et *b*) donne, par exemple, la marche de l'absorption chez deux cellules vivantes de *Vaucheria*, provenant de stations différentes; la fig. 4, *a* et *b* (tabl. I, 4, *a* et *b*) celle de cellules vivantes de *Festuca* et de *Hedera*. Les courbes se recouvrent presque complètement dans la plus grande partie de leur étendue, celles de *Festuca* et de *Hedera* même dans le bleu et le violet. On trouvera d'autres exemples à la fin du Mémoire (voir *Vaucheria*, tabl. I, 3 *b*, et *Sphagnum*, tabl. I, 4 *c*). *Il y a donc, pour les composantes colorées du mélange vert constituant la chlorophylle, un rapport quantitatif bien déterminé, qui paraît être généralement le plus favorable.*

Or, il est évidemment remarquable que ce rapport soit, de tous ceux qu'on a réellement observés chez les plantes vertes, celui pour lequel la quantité de la matière colorante jaune est un minimum. Ce fait pourrait être interprété comme venant à l'appui de l'opinion, généralement répandue, que la matière colorante verte (ou vert-bleuâtre) des plantes vertes est seule la „vraie'' chlorophylle, c'est-à-dire l'intermédiaire de l'action assimilatrice des corps chlorophylliens, et que la matière colorante jaune ne contribue en rien à la décomposition de l'acide carbonique. A la vérité, mes expériences antérieures ont prouvé

directement que, chez les Diatomées, celui des éléments de la chromophylle vivante qui absorbe fortement le bleu participe à l'assimilation du carbone autant et parfois plus que la composante verte, la chlorophylle „proprement dite", et qu'il en est de même, chez les Rhodophycées, de l'élément qui absorbe fortement le vert. Mais il serait encore possible que, dans les cellules vertes, l'élément jaune, qui sans doute n'est pas chimiquement identique à la composante jaune de la diatomine, jouât aussi un autre rôle physiologique. Cela s'accorderait bien avec le fait de l'action assimilatrice relativement faible des rayons très réfrangibles, fait qu'ont mis en évidence, pour ces cellules vertes, non seulement les expériences anciennes par les méthodes macroscopiques, mais aussi les expériences par la méthode bactérienne, dans lesquelles, toutefois, l'action a été trouvée en général notablement plus forte. Dans l'hypothèse, fondée sur mes recherches antérieures, que sous les conditions réalisées par la méthode des bactéries il se dégage en chaque point du spectre une quantité d'oxygène proportionnelle à la quantité d'énergie absorbée par la chromophylle, dans cette hypothèse, l'effet assimilateur des rayons plus réfrangibles, tel que l'ont donné mes expériences, serait en moyenne un peu plus faible qu'il n'aurait dû l'être d'après les valeurs trouvées par MM. Lamansky et Langley pour l'énergie relative de ces rayons dans le spectre solaire. Ce résultat, comme je l'ai déjà fait remarquer ailleurs à différentes reprises, peut toutefois s'expliquer aussi sans qu'il soit nécessaire de rejeter l'hypothèse en question. Il suffira d'attirer l'attention sur la difficulté de mesurer exactement l'absorption et l'assimilation dans les parties fortement réfrangibles du spectre; sur l'insuffisance, à raison de cette difficulté et des variations individuelles dans la composition de la chromophylle, du nombre des expériences exécutées; sur la circonstance que les rayons plus réfrangibles ont à effectuer, dans les cellules, encore d'autres actions que des actions assimilatrices; enfin sur le fait, constaté photo-

métriquement par M. Reinke [1]) et présumé en rapport avec la circonstance qui vient d'être mentionnée, de l'absorption relativement plus forte des rayons de réfrangibilité supérieure, même dans des parties constituantes en apparence incolores des cellules [2]). Ce dernier fait, que je puis confirmer, et qui dans certaines circonstances doit s'accuser plus fortement chez des objets macroscopiques, explique peut-être aussi, en partie, pourquoi l'effet assimilateur relatif des rayons bleus et violets est toujours trouvé plus faible, paraît-il, par les méthodes macroscopiques que par la méthode des bactéries, pourquoi, par exemple, le second maximum, dans le bleu près de F, ne veut pas se manifester.

En vue de ces questions, l'examen des feuilles jaunes à végétation d'apparence normale, dont nous avons parlé plus haut, offrait de l'importance. En effet, le développement énergique, la croissance luxuriante même que présentent parfois plusieurs de ces formes à feuilles jaunes (celle du *Sambucus nigra*, par exemple) semble difficilement pouvoir être mis sur le compte exclusif de la petite quantité de matière colorante *verte* contenue dans la plante.

J'ai spécialement étudié le *Sambucus nigra*, dont la variété à feuilles jaune d'or est très fréquemment cultivée en Hollande, dans les parcs, les jardins, &. Sur chaque pied de cet arbuste on trouve constamment, l'un à côté de l'autre, tous les passages des feuilles vert pur aux feuilles jaune pur, et ces dernières souvent en grande majorité [3]). De même que

1) *Bot. Zeit.*. 1886, No. 9 et fig.

2) D'après quelques expériences préliminaires, la cause de l'absorption relativement plus forte me paraît devoir être cherchée moins dans le protoplasma, comme le veut M. Reinke, que dans les membranes cellulaires. Voir ce qui sera dit plus loin sur la coloration des membranes cellulaires chez le *Phormium tenax* etc.

3) Habituellement, du reste, même dans les feuilles partout ailleurs d'un jaune pur, les cellules parenchymateuses situées immédiatement près des nervures sont de couleur verte. Dans d'autres cas, c'est l'inverse. Chez le *Lonicera brachypoda*, par exemple, chaque nervure, ainsi que ses ramifi-

l'œil nu ne peut découvrir ici, en dehors de la couleur, des différences bien certaines et constantes entres les feuilles vertes et les feuilles jaunes, de même le microscope n'en révèle pas en ce qui concerne les chromoplastes des taches vert pur et des taches jaune pur. La couleur des chromoplastes est souvent un jaune très saturé. Même en couche très mince, dans les grains les plus petits et les plus faiblement colorés, la chlorophylle typique se montre encore distinctement jaune *verdâtre*. Les feuilles jaunes ne contiennent donc évidemment qu'une proportion très faible de celui des éléments de la chlorophylle ordinaire auquel est due la forte absorption dans le rouge, entre *B* et *C*.

Les mesures, au moyen du photomètre microspectral, de de l'absorption dans les cellules jaunes vivantes du *Sambucus* m'ont donné les résultats suivants (comp. fig. 5 *a* et *b*, et tabl. II, 5 *a* et *b*). Depuis le rouge extrême jusqu'au vert d'environ 0,54 μ de longueur d'onde, absorption relativement faible; à partir de là, affaiblissement très notable et rapidement croissant, déjà à peu près maximum vers λ 0,50 μ. Au point le plus obscur de la bande d'absorption I, laquelle, quoique distinctement visible, était beaucoup moins accusée que dans le spectre des cellules vertes, l'affaiblissement n'était pas plus grand que celui des rayons verts, parfaitement transmis, d'environ 0,520—0,525 μ de longueur d'onde, tandis que dans les cellules vertes normales il est ordinairement à peu

---

cations, est bordée des deux côtés par une ligne jaune, tandis que tout le tissu intermédiaire est vert. Aux endroits jaunes j'ai trouvé des cellules palissadiques, contenant, au lieu de chromoplastes verts, des chromoplastes dont la couleur variait du jaune pur au jaune blanchâtre et qui par la forme, la dimension et le nombre, souvent ne différaient pas sensiblement des chromoplastes verts. A la limite des parties jaunes et vertes on rencontrait partout des transitions graduelles des grains chlorophylliens jaunes aux verts, non pas, il est vrai, à l'intérieur d'une même cellule, mais en passant d'une cellule à l'autre. — Chez l'*Aucuba japonica*, l'*Abutilon marmoratum*, etc., il n'y a aucune relation locale fixe entre la nervation et les taches jaunes des feuilles.

près égal à celui des rayons vert-bleuâtre de λ 0.49 μ (voir fig. 1, 3, 4).

Les bandes d'absorption II et III, dans l'orangé et le vert-jaunâtre, bandes que montre le spectre de la composante verte (cyanophylle, *Reinchlorophyll*, des auteurs), mais qui manquent à celui de l'élément jaune (xanthophylle des aut.), n'étaient pas distinctement développées. Dans les courbes d'absorption de la fig. 5, on ne voit de la bande II, à sa place normale (entre λ 0,64 et λ 0,62 μ), qu'une très faible indication, et dans la fig. 5 *b*, en outre, une indication très douteuse de la bande III. Cette circonstance témoigne aussi contre la présence, en quantité un peu notable, de la chlorophyllane, lequel témoignage est confirmé par l'absence de la bande IV *b*, particulièrement caractéristique pour la chlorophyllane et située (en solution alcoolique) vers λ 0,49—0,51 μ, ainsi que par l'absence de IV *a* (en solution alcoolique, entre λ 0,53 et λ 0,55 μ).

Dans presque toutes les courbes d'absorption obtenues, au moyen du photomètre microspectral, de cellules vertes typiques, les bandes II et III étaient très nettement accusées (voir fig. 1, 3 et 4, tabl., 1, 3 et 4 *a*, *b*, *c*). Aussi ai-je vu avec surprise que M. Reinke n'a rien pu en découvrir dans ses récentes déterminations [1]), à l'aide du photomètre de Glan, de l'absorption par les corpuscules verts du tissu. Il est possible que la faute en soit, dans une certaine mesure, à la nature des objets. Les tableaux de M. Reinke montrent que la valeur absolue de l'affaiblissement lumineux était, de même que dans les expériences antérieures de M. Vierordt, faits sur des feuilles entières, extrêmement élevée et évidemment due, pour une part considérable, à une autre cause qu'à l'absorption par la chlorophylle. En outre, la lumière colorée était toujours mêlée de lumiére blanche, qui n'avait traversée que des membranes cellulaires ou des cellules incolores. Dans ces conditions, les détails délicats du spectre de la chlorophylle doivent facilement s'effacer.

---

[1]) J. Reinke, *Bot. Zeitg.*, 1886, N°. 9 et fig.

Il est singulier toutefois que, même en opérant ses déterminations photométriques sur des solutions alcooliques de chlorophylle, M. Reinke n'ait rien pu trouver des bandes II et III, alors que M. von Wolkoff les avait déjà mises en évidence il y a dix ans, au moyen de l'appareil plus ancien, et en apparence plus imparfait, de Vierordt. Cela ne peut guère avoir tenu qu'à des défauts de l'instrument employé par M. Reinke [1]). Le photomètre microspectral a toujours montré ces bandes, que les extraits alcooliques fussent tout récents ou plus ou moins anciens, préparés dans l'obscurité ou à la lumière (voir fig. 6, *a*, *b*, *c*, tabl. 6, *a*, *b*, *c*, *Vaucheria*, *Hedera helix*) [2]). Elles ne dépendent donc pas, comme le veut

[1]) D'autres côtés encore, des objections ont été élevées contre l'appareil de Glan.

[2]) Comme simple exception, paraissant due à une forte proportion de xanthophylle, j'ai rencontré quelques cas où les bandes II et III n'étaient indiquées que très faiblement. Par occasion j'ai aussi reconnu nettement ces deux bandes dans le spectre de cellules vertes, qui avaient été rapidement desséchées à 50—60° sur le porte-objet, puis humectées d'huile d'olive pure et neutre (fig. et tabl. 7 *a*) ou d'eau (fig. et tabl. 7 *b*); de même, chez des cellules tuées par immersion rapide dans la glycerine concentrée fig. et tabl. 8, *a* et *b*). Dans ces deux cas, il ne s'opère aucun déplacement sensible des bandes. Dans le second (glycérine), on peut croire, en outre, qu'il y a réduction au minimum de la formation de chlorophyllane, ou plus généralement de la décomposition de la matière colorante normale par le suc cellulaire acide, décomposition qui naturellement est inévitable lors de la dessiccation ou lors de la „préparation de la chlorophylle" par les méthodes usuelles. — Des solutions alcooliques du *Reinchlorophyll* de Tschirch, matière dont l'auteur voulut bien me donner un échantillon, préparées fraîchement et autant que possible à l'abri de l'air et de la lumière, montraient les bandes II et III, aussi bien à la simple inspection du spectre, que dans les courbes résultant des mesures (fig. 9 *a*, tabl. 9 *a*). Par contre, des solutions analogues du „*Chlorophyllgrün*" de Hansen, également faites avec des échantillons gracieusement communiqués de la préparation originale, donnèrent un spectre auquel manquaient ces deux bandes, tant à l'inspection directe que d'après le témoignage des mesures photométriques (fig. 9 *b*, tabl. 9 *b*). Mais on y voyait très bien le dédoublement de la bande I, dédoublement caractéristique de la chlorophylle alcaline et que je n'ai jamais pu observer dans la chlorophylle vivante.

M. Reinke, exclusivement (bande III), ni même essentiellement (bande II et IV), d'un effet de contraste physiologique. Aussi leur présence se décèlera-t-elle indubitablement dans les courbes d'assimilation, aussitôt que celles-ci auront été déterminées avec l'exactitude nécessaire.

D'après nos mesures photométriques, nous sommes donc autorisés à admettre, comme cause de la coloration jaune des chromatophores chez le *Sambucus*, non pas il est vrai une „xanthophylle" pure, mais du moins un mélange ne contenant que peu de chlorophylle „proprement dite" (ainsi que de chlorophyllane). La présomption, que la chlorophylle proprement dite ne prend qu'une faible part à l'assimilation du carbone dans les feuilles jaunes, a donc acquis une base plus solide. Il faut reconnaître, toutefois, que, dans les faits dont il vient d'être donné communication, n'est contenue aucune preuve directe de l'action assimilatrice de la matière colorante jaune.

Pour obtenir cette preuve, il sera nécessaire de mesurer le dégagement d'oxygène chez des cellules les unes vertes, les autres jaunes, mais du reste aussi semblables que possible. On peut s'attendre à ce que, sous l'influence de la lumière blanche, les cellules jaunes dégageront notablement moins d'oxygène que les cellules vertes, puisqu'elles absorbent en général moins de lumière que celles-ci et laissent surtout passer facilement les rayons à grande force vive (depuis le rouge jusqu'au vert jaunâtre). Mais dans une lumière plus réfrangible, à partir environ de λ 0,53 μ, il y a apparence que les cellules jaunes décomposeront, relativement sinon absolument, plus d'acide carbonique que les vertes, lesquelles d'autre part, dans la lumière rouge ou jaune, auront certainement plus d'efficacité, absolue et relative, que les cellules jaunes.

Pour contrôler ces prévisions par les méthodes anciennes, macroscopiques, il conviendrait d'employer des feuilles minces et de faire tomber la lumière perpendiculairement à leur surface. Dans le choix des feuilles jaunes, il y aurait à éviter

celles qui présentent des taches albinotiques ou d'autres signes évidents d'une destruction de la matière colorante normale. En plein été, après l'action prolongée de la lumière solaire directe, je trouve presque régulièrement, chez le *Sambucus*, des signes de ce genre: la feuille entière n'est alors plus d'un jaune intense et pur, mais d'un blanc jaunâtre. D'ordinaire, les aréoles encadrées par les nervures sont blanches au centre et ne deviennent distinctement jaunes que vers la périphérie. Dans les parties blanches, le microscope nous l'apprend, il y a disparition non seulement de la matière colorante, mais aussi des chromoplastes; dans les parties faiblemant colorées en jaune, les chromatophores sont jaunâtre pâle, globuleux, gonflés, granuleux, le plus souvent en voie de décadence, et le protoplasma lui-même semble être légèrement coloré en jaunâtre. Entre ces cellules et les cellules à corps chlorophylliens d'aspect normal et de couleur allant du jaune au vert, il est facile d'observer, l'un à côté de l'autre, tous les intermédiaires. Comme il paraît douteux qu'on puisse trouver des feuilles jaunes tout à fait exemptes de matière colorante décomposée et de chromoplastes en voie de destruction, — la preuve rigoureuse serait du moins difficile à donner, — on ne devra accorder qu'une valeur conditionnelle aux expériences faites par des méthodes macroscopiques. La méthode des bactéries, qui permet d'opérer sur des cellules isolées et à chromoplastes reconnus de nature normale, fournira sans doute des résultats plus décisifs. Malheureusement, pour des raisons de santé, j'ai dû m'abstenir jusqu'ici d'une étude approfondie, et je me suis donc borné à fixer quelques points essentiels.

Au milieu d'une feuille jaune et d'une feuille verte, d'ailleurs semblables, d'un même pied de Sureau, en des points exactement correspondants et dépourvus de nervures, on découpa un segment jaune pur et un segment vert pur d'environ 1 mm carré de surface [1]), qui furent ensuite déposés

[1]) Quelques expériences ont été faites avec des fragments de feuilles encore plus petits.

sur le porte-objet dans une grosse goutte d'eau contenant d'innombrables bactéries aérobies très mobiles, puis recouverts d'une lame de verre et occlus dans la vaseline. Les deux préparations étaient placées à environ 5 mm du bord de la lame recouvrante et à 2 mm. l'une de l'autre. Après cinq minutes d'éclairement par la lumière diffuse et modérée du jour, elles furent examinées à un grossissement d'environ 100 diamètres: autour du segment de feuille verte se trouvait une dense accumulation, déjà visible à l'œil nu sous la forme d'une bordure jaune, de bactéries fourmillant avec vivacité; un rassemblement analogue, mais *beaucoup plus faible*, entourait le segment jaune. Dans toute l'étendue de la goutte d'eau, sauf au pourtour des deux préparations, les bactéries étaient entrées en repos. Quand l'éclairage était rendu plus intense au moyen du condensateur, l'accumulation augmentait notablement autour de l'objet jaune, mais sans jamais égaler celle formée autour de l'objet vert. — Le porte-objet fut ensuite obscurci pendant cinq minutes. Au bout de ce temps, les deux rassemblements s'étaient en grande partie dispersés et les mouvements des bactéries avaient cessé partout. En peu de minutes, toutefois, sous l'influence d'un nouvel éclairage continu et uniforme par la lumière diffuse du jour, l'état antérieur se rétablit. — Dans la partie bleue et violette du miscrospectre d'une lampe à incandescence alimentée par 3 éléments de Grove, l'agitation et l'accumulation, abolies par obscurcissement préalable, purent être rappelées de la manière la plus distincte, tant à la surface du fragment de tissu jaune qu'à celle du fragment vert, ce dernier, toutefois, exerçant de nouveau une action décidément plus forte. Le même effet, mais encore notablement plus énergique que dans le bleu, se produisit dans la région rouge du microspectre. Il me parut aussi que, dans cette région, la supériorité du fragment vert sur le jaune était encore beaucoup plus accusée que dans le bleu.

D'après cela, il est certain, en tout cas, que les cellules

foliaires à chromatophores jaunes dégagent, elles aussi, de l'oxygène dans une lumière mélangée, bien que, *ceteris paribus*, beaucoup moins que les cellules vertes, normales. Les faits exposés paraissent même parler en faveur de la participation, directe de l'élément jaune de la chlorophylle à la décomposition de l'acide carbonique. On ne pourra se prononcer catégoriquement, toutefois, qu'à la suite de recherches quantitatives détaillées.

Je passe maintenant à la seconde classe de feuilles colorées, caractérisée par le fait que la couleur, différente de la verte, ne provient pas d'une coloration anomale des chromoplastes, mais de la *présence de substances colorées, à côté de la chromophylle.* Dans la grande majorité des cas, c'est le liquide de la cellule qui est le siège de la matière colorante étrangère; il est comparativement rare que ce soit la membrane cellulaire.

Dans ce dernier cas, la coloration est toujours, à ma connaissance, bornée à des portions relativement petites de la surface foliaire, la feuille présentant, au total, la teinte verte normale. C'est ce qui a lieu, par exemple, chez l'*Evonymus japonicus*, chez plusieurs espèces d'*Agave*, chez le *Phormium tenax.* Ordinairement, la couleur des membranes est le blanc jaunâtre, et frappante seulement dans les couches un peu épaisses. Au moyen du photomètre microspectral, toutefois, il est facile de constater aussi sur des couches membraneuses minces l'absorption relativement plus forte des rayons bleus et violets. J'ai trouvé d'une coloration très intense, allant jusqu'à l'orange foncé, les membranes du *Phormium tenax*, plante dont j'ai examiné plusieurs exemplaires. Chez ceux-ci, le bord de chaque feuille, sur une largeur d'environ 1 mm., tant à la face supérieure qu'à la face inférieure, était d'un jaune-rougeâtre intense, et une ligne de la même couleur s'étendait sur la face inférieure de la feuille, tout le long de la nervure médiane. Sur les coupes, les parois externes très épaisses de l'assise cellulaire la plus superficielle apparaissaient teintées uniformément et très fortement en jaune

passant à l'orange. La coloration s'étendait aussi, mais avec une saturation très rapidement décroissante, aux parois latérales verticales de la couche cellulaire supérieure. Le contenu des cellules était tout à fait incolore. D'un jaune-orangé pur en couche d'environ $0^{mm},01$ d'épaisseur, et d'un rouge-orangé en couche plus épaisse, la couleur était le plus foncée au bord extrême de la feuille. A la face inférieure, la couleur était encore franchement jaune à 1 mm. du bord, plus loin jaune-verdâtre, à la distance de 1 cm. encore distincte sur chaque cellule isolée, vue du côté étroit. A la face supérieure, elle perdait si rapidement de sa saturation en s'éloignant du bord, qu'à la distance d'un peu plus de 1 mm. elle n'était déjà presque plus perceptible. Il n'y a donc qu'une bande de tissu extrêmement étroite, et entièrement insignifiante au point de vue de la nutrition de la feuille, qui reçoive de la lumière ayant traversé exclusivement des membranes cellulaires jaunes. Il n'était guère à supposer qu'au-dessous de cette bande le parenchyme assimilateur offrirait des particularités dépendant de ces conditions spéciales d'éclairement. Aussi n'ai-je pu constater avec certitude des différences de ce genre. L'absence de grains de chlorophylle dans certaines plages de parties partout ailleurs chlorophyllifères de la zone marginale extrême, sous les cellules du jaune le plus foncé, était le seul fait pouvant être interprété en ce sens. Il semble hasardé, toutefois, d'en rendre responsable la composition anormale de la lumière qui parvient à ces cellules. Même chez les membranes cellulaires les plus épaisses et de la couleur orange la plus foncée, le photomètre microspectral accusait une transparence presque absolue pour les rayons moins réfrangibles, du rouge extrême jusque dans le vert-jaunâtre; à partir de $\lambda = 0,57\ \mu$ seulement, l'absorption croissait avec plus de rapidité, et déjà vers λ 0,44 μ elle était à peu près maxima, quoique nullement complète, comme on peut le voir par la fig. 10 *a* et le tabl. 10 *a*. Ni avec mon appareil, ni avec l'appareil microspectral de Sorby-

Browning ou de Zeiss-Abbe, on ne distinguait de bandes d'absorption; dans les mesures non plus, on n'en découvre la moindre indication.

Les cellules parenchymateuses sous-jacentes aux parties de l'épiderme colorées en orange pur reçoivent donc avec très peu d'affaiblissement (abstraction faite de la perte par réflexion) la masse principale de la lumière du jour, et spécialement les rayons de la plus grande énergie, parmi lesquels ceux qui ont le plus d'efficacité pour l'assimilation de la chlorophylle. Quant à mettre sur le compte de la forte absorption des rayons très réfrangibles le développement imparfait du tissu vert en quelques points, on ne doit pas y songer; car, d'après les expériences connues [1]), le verdissement peut avoir lieu, dans tout le règne végétal même quand ces rayons sont exclus.

De beaucoup plus grande importance pour la question posée au début se montre l'étude des cas où c'est par suite de la *présence d'un suc cellulaire coloré* que la totalité ou du moins une grande partie du limbe foliaire possède une couleur différente de la verte. Innombrables sont les espèces chez qui ce phénomène s'observe, mais innombrables aussi, voire chez une même espèce, sur un même individu, dans une même feuille, les différences que la matière colorante intra-cellulaire présente quant au lieu et au moment de son apparition, et aussi quant à sa saturation et à sa nuance. Ces dernières circonstances rendent un peu plus difficile une exposition à la fois claire et exacte des phénomènes.

Parmi les cinquante végétaux environ, tous des Phanérogames, que j'ai examinés, on peut distinguer d'une manière générale deux groupes principaux, d'ailleurs liés l'un à l'autre par de nombreux termes intermédiaires.

---

[1]) Voir les indications bibliographiqnes données par J. Sachs, *Bot. Zeitg.*, 1864, p. 353, et par W. Pfeffer, *Pflanzenphysiologie*, I, 1881, p. 223.

Au premier groupe appartiennent les plantes dont les feuilles ont normalement, pendant toute ou presque toute la période de végétation, une couleur autre que la verte; au second, celles qui ne présentent une pareille coloration que passagèrement, au début de leur développement. A ce dernier groupe se rattachent des formes chez lesquelles une rubéfaction ne se produit, sur la face exposée à la lumière, que sous l'influence d'un éclairement intense et continu.

Le contingent le plus considérable au premier groupe est fourni par les plantes d'ornement à feuillage pourpre, généralement petites, qui trouvent dans l'horticulture moderne une application si fréquente, surtout por la décoration polychrome. Ce groupe renferme pourtant aussi des arbustes, tels que le *Berberis atropurpurea*, et des arbres, tels que le Hêtre pourpre, le *Betula atropurpurea*, etc. Les formes que j'ai étudiées sont outre les espèces déjà nommées, les suivantes: *Vriesea splendens*, *Nidularium Innocenti*, *Cryptanthus zonatus fuscus*, *Cypripedium venustum*, *Pellionea Devaueana*, *Epimedium alpinum*, *Brassica oleracea*, *Ricinus Gibsonii*, *Iresine Lindenii*, *Achyranthes Verschaffelti*, *Cissus discolor*, *Pelargonium zonale*, *Begonia rex*, *Cobaea scandens*, *Rosa*, *Ardisia demissa*, *Gesneria Donkelaari*, *Sinningea purpurea*, *Coleus Verschaffelti*, *Perilla Nankinensis*, *Lobelia ignea*, *Higginsia refulgens*, enfin *Tradescantia discolor*, *Tr. zebrina* et *Erythrotis Beddomei*.

Les plantes dont les feuilles sont colorées au début de leur développement, mais deviennent plus tard entièrement vertes, se rencontrent en si grande abondance parmi les végétaux supérieurs, surtout parmi les Dicotylédones, que l'énumération des formes qui n'y appartiennent pas serait peut-être plus facile que l'énumération contraire. Dans le nombre immense de ces plantes, j'ai examiné plus spécialement: *Artocarpus imperialis*, *Quercus pedunculata* et *sessiliflora*, *Populus nigra*, *Citrus medica*, *Tilia grandiflora*, *Rhus Cotinus*, *Acer Pseudo-Platanus*, *Ampelopsis hederacea*, *Vitis vinifera*, *Ilex Aquifolium*, *Myrtus communis*, *Punica granatum*, *Jambosa rubricaulis*, *Euca-*

lyptus Gunnii, *Pirus japonica*, *Crataegus oxyacantha*, *Wistaria sinensis*, *Centrosolenia bullata*.

Un groupement naturel d'après l'étendue occupée par la coloration anormale de la feuille ne se laisse guère établir, à cause des nombreuses transitions qu'on observe. Quelquefois, la feuille tout entière, face supérieure et face inférieure, est uniformément colorée en brun, en rouge ou en pourpre. C'est ce qui a lieu d'une manière permanente chez *Iresine Lindenii*, *Achyranthes Verschaffelti*, *Perilla Nankinensis*, *Lobelia ignea*, *Berberis atropurpurea*, *Fagus silvatica atropurp.*, plusieurs varietés de *Coleus*, de *Rosa*, de *Brassica*, et passagèrement, au début du développement, chez la plupart des plantes du second groupe, pendant longtemps entre autres chez *Quercus Robur*, différentes variétés de *Rosa* (surtout les Rosiers-des-quatre-saisons), *Acer Pseudo-Platanus*, etc.

Dans d'autres cas, c'est à des parties déterminées de la feuille que la coloration est limitée strictement ou principalement: à toute la face inférieure, par exemple, d'une manière permanente, chez plusieurs espèces et variétés de *Cyclamen*, *Begonia*, *Cissus*, *Tradescantia*, *Acer*, *Rosa*, *Rhododendron*; à une partie de la face inférieure (ou quelquefois des deux faces), d'une manière permanente, chez *Vriesia splendens*, *Nidularium Innocenti*, *Cryptanthus zonatus fuscus*, *Tradescantia discolor* et *zebrina*, *Cobaëa scandens*, *Cissus discolor*, beaucoup de variétés de *Coleus*, *Pelargonium zonale*, etc. Tantôt la coloration affecte surtout les parties latérales et la base de la feuille, tantôt elle en occupe de préférence le sommet ou le milieu, tantôt ce sont principalement les nervures qui présentent la couleur rouge et le tissu intermédiaire est vert, tantôt ce sont précisément les nervures qui restent incolores, etc. Pour l'objet de ce travail, toutefois, il est sans intérêt d'insister davantage sur ces détails macroscopiques.

Bien plus importante est la connaissance de la distribution de la matière colorante par rapport aux organes élémentaires assimilateurs. A ce point du vue, on rencontre de nouveau

les différences les plus grandes, même chez une seule et même feuille, en des points différents, ou dans des stades de développement différents, ou dans des conditions extérieures différentes.

Non seulement toutes les cellules de l'épiderme et de ses appendices, mais aussi celles du parenchyme assimilateur peuvent contenir du suc coloré. En général, toutefois, il règne chez une même forme une assez grande régularité quant à la distribution de la couleur dans les diverses espèces de tissus. Une série des types les plus répandus est représentée sur la Pl. II.

La fig. 1 *a*, prise d'une coupe transversale de la feuille adulte du *Fagus silvatica atropurpurea*, montre la matière colorante bornée exclusivement aux cellules épidermiques, le parenchyme assimilateur en étant complètement dépourvu. Vues sur la face de la feuille, fig. 1 *b*, les cellules épidermiques paraissent d'un brun pourpre foncé au-dessus du parenchyme vert, d'un rouge-pourpre pur au-dessus des faisceaux vasculaires incolores; à travers les parois latérales incolores et sinueuses des cellules épidermiques perce le vert du tissu assimilateur. — Une disposition essentiellement la même nous est offerte par les feuilles de *Perilla Nankinensis*, de *Lobelia ignea*, de plusieurs variétés de *Coleus*.

Tandis que, dans les feuilles dont il vient d'être parlé, toutes les cellules épidermiques, sans exception, contiennent ordinairement du suc rouge, les fig. 2 *a* et *b* représentent un cas (feuille de *Ricinus Gibsoni*) où certaines cellules épidermiques seulement, disposées d'une façon déterminée, sont rouges, les autres incolores. Parmi les premières, celles qui sont remplies de suc rouge, on distingue de grosses cellules globuleuses isolées, qui pénètrent profondement jusque dans le parenchyme pallissadique ou le parenchyme spongieux, et de petites cellules réunies en groupes de grandeur, de forme et d'arrangement divers, qui restent au niveau des cellules épidermiques incolores. — En dehors des cas cités, le tissu assimilateur a encore été trouvé dépourvu de matière colorante

non verte chez *Tradescantia zebrina* et *discolor* (fig. 3), *Erythrotis Beddomei*, *Vriesea splendens*, *Nidularium Innocenti*, *Cryptanthus zonatus fuscus*, et souvent aussi chez *Ampelopsis*, *Vitis*, *Rosa*, etc.

D'autre part, le cas est fréquent aussi où la matière colorante se rencontre exclusivement dans le tissu assimilateur. Les cellules palissadiques en sont alors le siège de prédilection. C'est ce qu'on voit, par exemple, dans les feuilles du Chêne (fig. 4 *a* et *b*), du Hêtre, du Peuplier, du Saule, chez plusieurs variétés de *Coleus*, de *Pelargonium zonale* et de beaucoup d'autres plantes. Souvent la coloration est particulièrement intense dans celles de ces cellules qui touchent aux faisceaux vasculaires. En même temps que les cellules palissadiques, toutefois, toutes les cellules du parenchyme spongieux, ou du moins un grand nombre d'entre elles, et de plus les cellules épidermiques de la face supérieure de la feuille, ou de l'inférieure ou de toutes les deux à la fois (*Coleus* fig. 5), peuvent contenir du suc rouge. La coloration des cellules parenchymateuses est particulièrement générale et frappante chez *Achyranthes Verschaffelti* (fig. 6), *Iresine Lindenii*, plusieurs variétés à feuilles très foncées de *Coleus* et de *Brassica*, chez *Berberis atropurpurea*, *Epimedium alpinum*, *Begonia rex*; passagèrement, elle est fréquente dans les très jeunes feuilles de *Fagus*, *Populus*, *Quercus*, *Tilia*, *Salix*, *Ilex Aquifolium*, *Eucalyptus Gunnii*, *Punica granatum*, *Crataegus oxyacantha* C'est ordinairement dans les cellules palissadiques que la solution de matière colorante est le plus saturée. Les cellules du parenchyme spongieux offrent fréquemment une très forte inégalité de coloration. Souvent la couleur rouge est bornée à quelques-unes d'entre elles, et celles-ci sont alors situées de préférence au voisinage immédiat des cellules palissadiques ou de l'épiderme de la face inférieure (fig. 4, *Quercus*).

Dans maints cas, enfin, la matière colorante se trouve uniquement dans les assises plus internes, chlorophyllifères, de la feuille. L'assise cellulaire immédiatement sous-jacente aux cellules palissadiques en est alors toujours, paraît-il, le

siège spécial. C'est ce qu'on observe chez *Higginsia refulgens* (fig. 7), *Sinningea purpurea*, *Gesneria Donkelaari*, *Ardisia demissa*, *Pellionea Devaueana*.

De la revue rapide que nous venons de passer [1]), il ressort que l'influence de la matière colorante rouge sur l'éclairement des organes élémentaires assimilateurs doit être très différente, ne fût-ce qu'à raison des différences de la distribution de cette matière dans la feuille. Il existe de nombreux cas dans lesquels, presque littéralement, pas un seul grain de chlorophylle de la feuille, ni même de toutes les feuilles de la plante, ne reçoit, à aucune époque de la vie ni d'aucun côté, de la lumière qui n'ait pas traversé préalablement du suc cellulaire rouge. La plante entière vit donc alors comme derrière un écran rouge permanent. Dans ces conditions se trouvent, par exemple, *Achyranthes Verschaffelti*, *Iresine Lindenii*, plusieurs variétés de *Coleus*. Elles sont réalisées à un degré à peine moindre chez les formes, telles que Hêtre pourpre, *Perilla Nankinensis*, *Lobelia ignea*, *Berberis atropurpurea*, où la lumière ne peut entrer sans modification qualitative que lorsqu'elle tombe bien perpendiculairement sur les étroites parois latérales des cellules épidermiques (fig. 1), où, par conséquent, la masse principale de la radiation est partout soumise à une absorption par le suc cellulaire rouge, avant d'atteindre la chlorophylle.

Ces cas extrêmes ont pour nous, on le conçoit, une importance particulière.

Il n'est pas douteux, me semble-t-il, que dans ces cas l'assimilation ne le cède nullement en énergie à celle des espèces les plus voisines à feuilles non colorées. Le Hêtre pourpre, par exemple, forme en Hollande les arbres les plus grands; aucune autre espèce arborescente indigène ne le surpasse, et bien peu l'atteignent, sous le rapport de la densité et de

---

1) On trouvera des particularités anatomiques plus détaillées dans les substantiel Mémoire que vient de publier M. Hassack, *Botan. Centralblatt*. 1886, N°. 48—52.

l'ampleur de sa couronne de feuillage; la rapidité de sa croissance n'est pas moindre, à ce que m'ont assuré plusieurs arboriculteurs expérimentés, que celle du Hêtre vert. La même chose s'applique, *mutatis mutandis*, aux *Berberis atropurpurea* et *vulgaris*, et il est également facile de se convaincre que, parmi les nombreuses variétés de *Coleus*, les formes à feuilles uniformément colorées en pourpre foncé ne croissent pas plus lentement et ne prennent pas un développement moindre que celles dont les feuilles sont en majeure partie vertes. Tout au contraire, l'expérience a appris aux horticulteurs que ces formes de *Coleus* à feuillage pourpre foncé végètent plus énergiquement que les formes plus ou moins vertes, et cela non seulement à conditions égales, mais aussi — d'après la réponse unanime faite, de quatre côtés différents, à mes demandes d'informations — sous un éclairage plus faible. Dans tous ces cas pourtant, on le reconnaît déjà à simple vue, la lumière subit un affaiblissement très notable, l'énergie totale de la radiation qui pénètre jusqu'aux corps chlorophylliens est, en général, beaucoup moindre que pour des feuilles vertes de même structure.

Si, en dépit de cette circonstance, la coloration ne paraît avoir aucune influence appréciable sur l'énergie de l'assimilation de la plante entière, on pourrait etre tenté d'en chercher la cause dans un développement plus abondant ou une disposition plus avantageuse des grains chlorophylliens. Mais rien ne vient à l'appui de cette hypothèse. Comme résultat général, je dois déclarer d'emblée que ni la richesse en grains chlorophylliens, ni la forme, la dimension ou la distribution de ces grains ne présentent quelque rapport évident et constant avec la coloration des feuilles. Ni accélération ni ralentissement dans la formation et le développement des corps chlorophylliens ne se laissent constater avec certitude derrière la matière colorante rouge. Là où existent des différences de ce genre, elles sont de même nature et de même ordre de grandeur que celles qu'on trouve dans les feuilles

vertes. Un laborieux examen quantitatif pourrait seul, à mon avis, faire découvrir peut-être de petits écarts constants, liés à la présence de la matière colorante rouge. Mais, selon toute apparence, ces écarts seraient tellement faibles qu'il n'y aurait pas moyen de les utiliser pour la solution de la question physiologique qui nous occupe.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi — et cela n'est pas d'importance moindre — à la *couleur* des corps chlorophylliens. Ni la vue directe, ni le photomètre microspectral, ne parviennent à saisir quelque particularité à cet égard. La couleur est le vert-jaunâtre normal, la courbe d'absorption a la forme ordinaire, la saturation de la couleur, dans les chromatophores pris séparément, n'est ni plus forte ni plus faible qu'ailleurs. [1]) Les déviations éventuelles tombent toutes dans la limite de celles qu'on observe aussi chez les feuilles vertes d'espèce analogue. Je m'abstiens, pour cette raison, de citer des résultats numériques.

Le fait, que la forte absorption par la matière colorante rouge ne porte aucun préjudice sensible à l'assimilation du carbone, ne paraît donc pouvoir s'expliquer qu'en admettent que cette absorption est essentiellement bornée aux rayons qui ont le moins d'importance au point de vue de l'assimilation. La simple inspection des couleurs semble déjà confirmer cette présomption. Sans exception, en effet, chez les plantes ci-dessus citées, le suc cellulaire, qui masque la chlorophylle, est rouge, le plus souvent décidément rouge pourpre, parfois avec une teinte de violet pourpré. Les rayons verts de la lumière solaire, qui d'après mes expériences servent relativement le moins au travail de l'assimilation, sont donc, en tout cas, ceux qui éprouvent la perte la plus forte avant d'atteindre les laboratoires où se décompose l'acide carbonique; les rayons rouges, et certainement aussi une partie des rayons

[1]) Lorsque les cellules à chlorophylle contiennent elles-mêmes du suc rouge, on ne peut sûrement juger de la couleur des grains chlorophylliens qu'après avoir fait écouler le suc, en entamant les cellules.

très réfrangibles, y pénètrent beaucoup moins affaiblis, à proportion. Toutefois, l'analyse purement subjective de l'impression chromatique reste insuffisante.

La simple comparaison des spectres au moyen des oculaires spectraux ordinaires de Zeiss-Abbe ou de Sorby-Browning ne peut, également faire connaître que d'une manière générale la marche de l'absorption. Il m'a pourtant été possible de constater par ce moyen que, dans toutes les plantes examinées, la marche en question est essentiellement la même, en ce sens que l'affaiblissement le plus considérable tombe indubitablement dans le vert, tandis que la transmission est excellente pour le rouge et très bonne aussi, relativement, pour le bleu et le violet. Dans la plupart des cas, l'absorption croît graduellement des deux extrémité du spectre vers son milieu, et spécialement du jaune et du bleu vers le vert; lorsque la matière colorante est très concentrée dans la cellule, l'accroissement est souvent si rapide (*Iresine*, *Lobelia*, *Cissus*) qu'il en résulte l'impression d'une très large bande estompée, entre λ 0,59 et λ 0,50 μ environ.

Des différences frappantes n'ont été offertes que par le spectre des cellules épidermiques des Commélynacées: *Tradescantia discolor* (fig. 3), *Tr. zebrina* et *Erythrotis Beddomei*, cellules qui d'ailleurs se distinguent déjà à l'œil nu par une coloration plutôt violet-pourpre que rouge. Dans ce spectre on voit, quand la couleur du suc cellulaire n'est pas à saturation trop faible, trois bandes dans le vert: la plus foncée. de λ 0,600 à λ 0,575 environ; la seconde, un peu moins foncée, à peu près de λ 0,558 à λ 0,533, et la troisième, très faible, environ entre λ 0,520 et λ 0,495 [1]). Une quatrième bande,

1) M. G. Kraus (*Znr Kenntniss der Chlorophyllfarbstoffe* etc., Stuttgart 1872), qui le premier a décrit et figuré le spectre des cellules épidermiques de la face inférieure des feuilles de *Tradescantia zebrina*, ne remarqua, probablement parce que les cellules examinées étaient trop peu saturées de matière colorante, ni la troisième bande, ni la quatrième; de celle-ci, d'ailleurs, moi-même je ne garantis pas l'existence.

près de *F*, environ de λ 0,49 à λ 0,47, resta douteuse. Le rouge et le vert sont à peine affaiblis. Le maximum (subjectif) absolu de clarté se trouve, quand on emploie la lumière du jour ou d'une bonne lampe, dans le vert près de λ 0,565. Le spectre ressemble beaucoup, en conséquence, à celui de la mycoporphyrine, récemment décrit et figuré par M. Reinke [1]). Les deux matières, ou mélanges de matières, ne sont pourtant pas identiques. Les mesures avec le photomètre microspectral donnèrent pour l'absorption une marche essentiellement différente (v. fig. 11*a* et tabl. 11*a*). Les constantes locales (rapports des coefficients d'extinction, d'après la proposition très pratique de Reinke), $\frac{D}{E}$, $\frac{D}{F}$, $\frac{E}{F}$, s'élevaient pour la matière colorante du *Tradescantia* (en moyenne de trois expériences faites sur des cellules vivantes) respectivement à 1,084, 2,670, 2,463, contre 3,485, 2,108, 0,682 pour la mycoporphyrine (solution alcoolique). Ces différences deviennent encore beaucoup plus notables lorsqu'on a égard, suivant la règle de Kundt, aux déplacements qui dépendent de la nature différente du dissolvant. En outre, la matière colorante du *Tradescantia* n'est pas fluorescente. Spectroscopiquement, elle présente aussi quelque analogie avec la matière colorante des pétales bleus du *Cineraria* (fig. 11*b*, tabl. 11*b*). Comme elle est emmagasinée principalement à la face inférieure, non tournée vers la lumière, des feuilles, lesquelles ailleurs sont vertes ou du moins verdâtres, elle ne peut jouer que dans une mesure très restreinte le rôle d'écran vis-à-vis de la chlorophylle; par suite, il me semble inutile de nous y arrêter ici plus longtemps. Je renvoie donc aux analyses photométriques communiqués plus haut et à la courbe tracée sur la Planche I, et me contente de noter encore que la matière en question, contrairement à celle dite anthocyane, ne devient pas très sensiblement plus rouge dans

---

1) J. Reinke, *Der Farbstoff der Penicilliopsis clavariaeformis* Solms, dans *Ann. du Jardin botan. de Buitenzorg*, vol. VI, 1886, p. 73, Pl. VIII.

l'acide acétique quelle ne l'est déjà dans la cellule vivante normale, et que par l'ammoniaque elle devient d'abord violette, puis couleur indigo.

En ce qui concerne les solutions de matière colorante *rouge pourpre* (érythrophylle *auct.*) des autres feuilles colorées, l'analyse microspectrale d'une part confirme les résultats de l'observation par le simple oculaire spectral, mais d'autre part fournit aussi, sur la valeur absolue de l'affaiblissement de la lumière, les données qui sont nécessaires pour les déductions ultérieures et spécialement pour la question que nous nous sommes posée.

Dans les fig. 12—20 (comp. Tabl. 12—20), la marche de l'affaiblissement de la lumière par les cellules rouges de plusieurs espèces de plantes est représentée graphiquement en fonction de la longueur d'onde. Chaque courbe donne la marche de la perte occasionnée par une cellule unique, la lumière tombant perpendiculièrement.

Ce qui frappe ici tout d'abord, c'est la valeur généralement très notable de la perte totale de lumière. De l'ensemble des radiations visibles, comprises environ entre λ 0,71 μ et 0,40 μ, il est retenu, en moyenne, de un tiers à la moitié. Je remarque expressément que les mesures servant de base à nos courbes n'ont pas été faites sur des cellules choisies pour leur couleur foncée, mais sur des cellules semblables à celles qui formaient la majorité en chaque ces particulier. Très souvent, la saturation de la couleur est sensiblement égale dans toutes les cellules rouges de la même feuille. Cela est notamment le cas lorsque la feuille entière présente à l'œil une coloration uniforme et en même temps très foncée, par exemple chez *Fagus silvatica atropurpurea*, *Lobelia ignea*, *Perilla Nankinensis*, plusieurs variétés de *Coleus*. Dans ces cas, il y a donc certainement absorption de plus du tiers, et même de plus de la moitié de la lumière qui, en l'absence de la matière colorante rouge, aurait pénétré dans le parenchyme assimilateur.

C'est bien au suc cellulaire rouge qu'est due essentiellement cette perte considérable de lumière. Nos mesures ne faisant

connaître que l'intensité de la lumière transmise par la cellule rouge, il pourrait semble douteux, en effet, si les courbes représentent réellement la marche exacte de l'absorption dans la solution colorée, ou si une portion notable de la perte de lumière ne dépendrait pas plutôt de l'absorption dans les membranes cellulaires ou dans le protoplasma, et surtout de la réflexion sur les parois de la cellule.

Quant à la perte par réflexion, dans mes mesures antérieures [1]), faites sur des cellules contenant de la chromopylle, je l'ai évaluée à quelques centièmes seulement, et lui ai par suite dénié toute influence appréciable sur les résultats obtenus. Cette conclusion à suscité, de la part de M. Reinke [2]), quelques objections, fondées sur des considérations et des mesures qui, relatives surtout à des feuilles entières, sont exactes pour celles-ci. Mais mon assertion, ainsi qu'il résulte d'ailleurs clairement du texte de mon Mémoire, reposait sur des mesures comparatives directes de la perte de lumière dans des cellules colorées et des cellules incolores, et surtout dans des parties les unes colorées les autres incolores d'individus cellulaires semblables, appartenant, entre autres, aux genres *Spirogyra*, *Mesocarpus*, *Zygnema*, *Sphaeroplea*, *Callithamnion* [3]). Ces mesures n'avaient donné, dans la plupart des cas, qu'un affaiblissement tout à fait inappréciable de la lumière qui avait traversé normalement les objets incolores, résultat que laissait du reste pressentir la transparence parfaite, à l'œil, de ces objets. Ce n'est qu'aux parois latérales de ces cellules généralement cylindriques, et à cause de l'incidence très oblique de la lumière en ces points, qu'il se produit par réflexion, nonobstant les différences relativement faibles des pouvoirs réfringents de l'eau et de la membrane cellulaire, une perte

---

[1]) *Onderzoek.* etc., (3) IX, 1884, p. 6. — *Botan. Zeitung* 1884, Nos. 5 et 6.

[2]) *Bot. Zeitg.* 1886, Nos. 9—14, p. 12 du tiré à part, Note.

[3]) Je n'ai donc pas négligé, comme le dit M. Reinke, *l.c.* p. 9, la question de l'absorption par les éléments *incolores* du corps protoplasmique des cellules. Comment, au reste, aurait-il été possible d'éluder cette question!

assez notable. Aussi le spectre d'absorption se montre-t-il limité des deux côtés par un bord obscur, qui s'éclaircit graduellement en dedans. Mais on évitait les perturbations que cette circonstance pouvait faire craindre, en masquant, au moyen du prisme comparateur et de l'une des glissières oculaires, les parties marginales de la cellule ; on n'utilisait alors pour la comparaison que les parties centrales, qui — si la cellule a la position horizontale nécessaire — sont frappées par les rayons lumineux sous un angle droit ou presque droit. Lorsque les bords obscurs sont très étroits, on peut aussi omettre le prisme comparateur, masquer l'un des bords, l'extérieur, par la glissière oculaire, et disposer l'autre de manière qu'il partage en deux, suivant sa longueur, la limite des deux moitiés de la fente et par conséquent celle des deux spectres. — Les cellules dans lesquelles des corps fortement réfringents, tels que grains d'amidon, globules de tannin etc., produisaient un affaiblissement tant soit peu marqué de la lumière transmise, étaient exclues des expériences, ou du moins on ne faisait pas entrer en ligne de compte les résultats qu'elles avaient donnés. On n'utilisait pas non plus, pour la comparaison, les cellules dont le protoplasma était mort et par suite devenu trouble, car en pareil cas la perte de lumière peut facilement atteindre des proportions perturbatrices, même dans une cellule isolée, lorsque la couche protoplasmique n'a pas une épaisseur trop faible [1]).

---

[1]) Lorsqu'il s'agit de couches cellulaires épaisses, de feuilles entières par exemple, cette circonstance est loin d'être négligeable, comme le croit M. Reinke (*l c.*, p. 12 du tiré à part) Elle interdit formellement de déterminer les coefficients d'extinction de la chromophylle vivante par la voie qu'a suivie M. Reinke, c'est-à-dire, en comparant l'absorption du tissu coloré vivant et du tissu décoloré par l'action de l'alcool. Les valeurs obtenues pour les coefficients d'extinction des feuilles mortes, décolorées, sont en général trop fortes, par suite de la perte de transparence et du ratatinement des protoplastes. Aussi arrive-t-il, même pour le thallus du *Monostroma latissimum* formé d'une seule assise cellulaire, et d'après les propres mesures de M. Reinke, que la préparation *décolorée* absorbe, des longueurs d'onde

Si les conditions laissent à désirer pour les cellules vivantes qui contiennent des corps chlorophylliens, elles sont plus favorables, en général, pour les cellules à suc cellulaire coloré, spécialement pour des cellules épidermiques qui, comme celles dont proviennent les tableaux et les courbes 12—20, sont exemptes de grains chlorophylliens, ne possèdent qu'un revêtement protoplasmique excessivement mince, et ont en outre la forme de plaques à faces supérieure et inférieure parallèles et à parois latérales verticales. Il n'y a rien d'étonnant à ce que, chez de pareilles cellules, la perte par réflexion, lors des mesures, n'atteigne pas une valeur appréciable. Car ici les rayons venus d'en bas, parallèlement à l'axe du microscope, frappent sous un angle droit, ou presque droit, la surface extérieure de l'objet et les divers milieux intérieurs, tous optiquement homogènes et transparents, qu'ils ont à traverser. La preuve qu'en effet la réflexion est sensiblement nulle, c'est que les rayons rouges, de λ 0,70 à 0,65 μ environ, après avoir traversé la cellule, ont encore exactement, ou presque exac-

---

574–530, autant que l'objet vivant, *chlorophyllifère*. De ces radiations, la chlorophylle n'aurait donc absolument rien absorbé! C'est là, du moins, ce qui résulte des nombres inscrits par M. Reinke dans les colonnes E et E_1 de son tableau 2. Il est vrai que dans la dernière colonne de ce tableau, au lieu des valeurs zéro que ces nombres assigneraient à la différence $E — E_1$, on trouve de très petites valeurs positives (0,014 et 0,01) pour les coefficients d'extinction de la chlorophylle en ces points du spectre. Quand même ces dernières valeurs seraient exactes, celles des colonnes E et E_1 fautives, cela ne changerait pas grand'chose au fond. Je suis surpris que M. Reinke n'ait pas rencontré de cas où la feuille morte et décolorée aurait intercepté même plus de lumière verte que la feuille encore vivante et pourvue de sa matière colorante, où, par conséquent, l'absorption par la chlorophylle, calculée suivant M. Reinke, aurait atteint des valeurs négatives! Peut-être obtiendrait-on des résultats plus exacts si, avant de mesurer l'absorption dans les cellules décolorées, on y faisait disparaître autant que possible, par exemple au moyen d'un traitement à l'alcali caustique, le trouble du protoplasma. Même alors, toutefois, il faudrait commencer par rechercher, en chaque cas particulier, jusqu'à quel point la transparence normale se laisse rétablir de cette manière.

tement, la même intensité qu'avant ce passage (v. notamment fig. 12*a* — *Fagus*, fig. 13*a*, *b*, *c* — *Lobelia*, 15 — *Iresine*, 17*b* — *Ampelopsis*, 18*a* — *Quercus*, 18*c* — *Pelargonium*, 19*a* — *Ricinus*, 20 — *Sedum*).

Ce dernier fait prouve, en outre, que, dans les cas dont il s'agit, l'absorption à l'intérieur des membranes cellulaires ne jouait pas non plus un rôle appréciable. On aurait pu le prévoir, d'ailleurs, rien qu'à considérer la très faible épaisseur de ces membranes et leur transparence et incoloration absolues. Tout au plus pourrait-on craindre une action de ce genre de la part des parois externes, souvent fortement épaissies, des cellules épidermiques (v. fig. 1*a*, Pl. II, *Fagus*). Mais leur influence se laisse éliminer par la comparaison des spectres de deux cellules directement contiguës [1]), dont l'une, ouverte, a perdu son contenu rouge, tandis que l'autre est restée normale. En enlevant l'épiderme ou, lorsque cela présente des difficultés, en pratiquant à la surface de la feuille de minces coupes tangentielles, on obtient aisément de pareils objets, dans un état convenable et en nombre suffisant. Les courbes d'absorption auxquelles ils conduisent ne diffèrent pas sensiblement de celles qui résultent de la comparaison du spectre d'une cellule colorée avec celui de la lumière qui a passé tout à côté et n'a traversé que de l'eau. L'affaiblissement des rayons rouges, non sensiblement absorbés par la matière colorante rouge, était insensible aussi dans ce dernier cas.

D'après tout ce qui précède, nos courbes peuvent être regardées, sans erreur marquée, comme exprimant l'absorption de la lumière dans le suc cellulaire rouge. A la vérité, ce point est indifférent pour la question que nous cherchons avant tout à résoudre, celle de la composition de la lumière qui entre en action dans les corps chlorophylliens des feuilles

---

1) La limite des deux cellules doit être placée de telle sorte que son image coïncide exactement avec la limite des deux moitiés de la fente du photomètre microspectral.

colorées, mais à divers autres égards il n'est pas sans importance, comme nous le dirons plus loin.

Si nous considérons maintenant de plus près la couleur de la lumière transmise par les cellules rouges, c'est-à-dire, l'intensité relative des divers rayons dont elle est composée, nous constatons dans nos courbes et nos tableaux un accord très général, en tant qu'ils confirment que toujours l'absorption porte essentiellement sur la partie verte du spectre. Tandis que le rouge, depuis l'extrême limite de la visibilité jusque vers la longueur d'onde 0,65, passe intégralement ou presque intégralement, et que de l'orangé aussi, jusqu'à λ 0,60, il est absorbé en moyenne moins de 10 %, l'intensité lumineuse diminue avec une vitesse très rapidement croissante dans le jaune et le vert-jaunâtre, atteint vers λ 0,55 le minimum absolu (ordinairement entre 10 % et 30 %, ou même moins de 10 %), puis se relève bientôt dans le vert-bleuâtre et le bleu, d'une manière si abrupte que déjà vers *F* (λ 0,486) elle mesure en général plus de 50 % et que dans l'indigo et le violet elle atteint des valeurs encore beaucoup plus élevées (dépassant 80 %).

En gros et au total, l'allure est donc *complémentaire à la marche de l'absorption dans la chlorophylle.* Le rouge, le bleu et le violet, rayons que la chlorophylle absorbe le plus fortement, sont transmis le mieux. Le maximum de l'absorption coïncide exactement ou presque exactement avec le minimum de l'absorption par la chlorophylle, car il se trouve d'ordinaire vers λ 0,55, rarement plus rapproché du bleu. Les écarts principaux à la marche complémentaire ne consistent qu'en l'absence d'une absorption plus forte du rouge extrême et en l'absence de minima et maxima secondaires, correspondant aux bandes d'absorption II, III etc. de la chlorophylle.

Ce résultat a pour nous une haute valeur. En lui se révèle une des plus belles harmonies du règne végétal. Si, dans des conditions de végétation d'ailleurs favorables, la fonction la plus importante de la feuille, la formation de substance

organique sous l'influence de la lumière, est pour chaque longueur d'onde, comme je le pense, environ proportionnelle à la grandeur de l'absorption par la chlorophylle, une distribution de l'absorption lumineuse, telle que nous l'offre ici le spectre du suc cellulaire rouge, est évidemment la plus avantageuse qu'on puisse imaginer; grâce à elle, en effet, l'affaiblissement porte le moins sur les rayons qui prennent à l'assimilation la part la plus active, et réciproquement. En dépit de sa très forte valeur totale, l'affaiblissement lumineux, ainsi réparti, ne peut causer que peu de préjudice à l'activité assimilatrice des corps chlorophylliens.

Il n'en serait pas de même s'il fallait adopter l'opinion plus ancienne, d'après laquelle l'accomplissement du travail assimilateur appartiendrait principalement aux rayons jaunes. Pour ces rayons, l'affaiblissement produit par le suc cellulaire rouge est dans tous les cas très notable, souvent de près des deux tiers pour les rayons voisins de *D*, plus grand encore pour ceux qui correspondent exactement au maximum, tel qu'il est indiqué sur la courbe de M. Pfeffer, du dégagement d'oxygène dans le spectre.

Les conditions seraient encore bien plus mauvaises, pour les plantes à feuilles colorées, si l'hypothèse de l'écran, émise par M. Pringsheim, exprimait la vérité. Dans cette hypothèse, la nature aurait évidemment agi avec beaucoup plus de sagesse en étendant au-dessus des cellules assimilatrices de ces plantes, au lieu d'un écran rouge, un écran vert, tout juste de la même couleur que la chlorophylle. Ou bien M. Pringsheim croirait-il peut-être que l'écran rouge complète l'action de la matière colorante de la chlorophylle, en tant que, dans la lumière verte maintenant affaiblie, les phénomènes d'oxydation devraient encore plus céder le pas aux phénomènes de réduction? Mais alors, un écran noir ne serait-il pas le meilleur de tous? Et même, à quoi bon de la lumière?

A MM. Reincke, Timiriazeff et autres, qui, tout en admettant avec moi pour la partie moins réfrangible du spectre une

proportionnalité entre les valeurs de l'absorption et celles de l'assimilation, ne veulent pas la reconnaître pour les parties à réfraction plus forte, j'opposerai surtout la perte relativement très faible que, d'après toutes mes mesures, les rayons bleus et violets éprouvent dans le suc cellulaire rouge. Ce fait me semble, sinon prouver, au moins rendre très probable que les rayons fortement réfrangibles prennent, eux aussi, une part fondamentale à la plus importante fonction des cellules vertes. On ne saurait objecter à cette conclusion le peu d'énergie que ces rayons, comparés aux rayons rouges et oranges, possèdent dans la lumière solaire. Car ce désavantage est à peu près compensé, si même il ne l'est complètement, par l'absorption plus forte du bleu et du violet dans la chlorophylle. Il est certainement remarquable aussi que, lorsque la couleur du suc cellulaire des plantes à feuillage coloré s'éloigne de la teinte pourpre ordinaire, ces écarts paraissent s'opérer toujours dans le sens d'un renforcement du bleu Des exemples en ont déjà été réunis dans la *Dissertation* d'Ed. Morren [1]). On peut rappeler ensuite le fait que, dans les eaux bleues des lacs et des mers, des plantes vertes prospèrent occasionnellement à des profondeurs (10—25 mètres) où, d'après les mesures photométriques connues, l'énergie absolue des rayons rouges et oranges de la lumière du jour est déjà beaucoup moindre que celle des rayons bleus et vert-bleuâtre.

Dans les cas où, à côté de la chlorophylle, apparaît une matière colorante rouge pur ou jaune pur. absorbant de préférence le bleu et le violet, ou bien l'assimilation est affaiblie (coloration jaune automnale, états de repos rouges et jaunes des Algues), ou bien la matière colorante occupe un espace si borné que l'accès des rayons très réfrangibles n'est empêché que pour une partie insignifiante de la masse totale de la chlorophylle (*Phormium tenax*). Dans les états rouges et jaunes des Algues que j'ai examinées (*Haematococcus*, *Chroolepus*), la

[1]) Ed. Morren, *Diss. sur les feuilles vertes et colorées*, Gand, 1858, p. 146.

matière colorante, en outre, est enveloppée par la chlorophylle, de sorte que celle-ci reçoit en majeure partie de la lumière non modifiée qualitativement et agit plutôt elle-même comme écran pour la matière colorante rouge; j'ai déjà insisté sur l'importance de ce fait, au point de vue de l'assimilation, dans une communication antérieure [1]). Les mesures par le photomètre microspectral ont du reste montré que la matière colorante rouge de l'*Haematococcus* laisse, elle aussi, mieux passer les rayons plus réfrangibles, environ du vert-bleuâtre vers λ 0,50 jusqu'au violet, quoique pas au même degré, à beaucoup près, que le suc cellulaire pourpre des plantes supérieures. Comme on n'a pas publié jusqu'ici d'analyses photométriques de la couleur rouge de ces Algues, je donnerai (tabl. 10 *b* et courbe 10 *b*) une analyse relative à l'*Haematococcus pluvialis*.

La perméabilité relative, et souvent aussi la perméabilité absolue du suc cellulaire coloré, pour la lumière bleue, est extraordinairement accrue lorsque la réaction acide s'affaiblit ou passe même, à travers l'état neutre, à la réaction alcaline. Maintes fois cela arrive déjà „spontanément'', au début de la mortification des cellules, cas où le changement de couleur est souvent, pour un temps plus ou moins long, le seul signe évident que la cellule a cessé d'être complètement normale. Dans les cellules épidermiques du *Cissus discolor*, j'ai vu cette modification de couleur se produire si rapidement, qu'aussitôt après la préparation de l'objet, ou du moins après un court séjour sous le verre recouvrant, dans une solution à ½ pour cent de sel marin, un grand nombre de cellules avaient déjà pris des teintes allant du violet au bleu pur et foncé, tandis que quelques-unes seulement présentaient encore la coloration tout à fait normale. Plus tard, après des heures ou des jours, on ne trouvait parfois plus que des cellules bleues. En général, l'altération de couleur ne se produisait pas au même moment

1) *Ueber Assimilation von Haematococcus*, dans *Bot. Zeitg*, 1882, N° 39. — *Onderzoek.*, (3), VII, p. 200.

pour toutes les cellules, ni même pour des cellules continguës et en apparence semblables et soumises à des conditions semblables : tout au milieu de cellules rouge pur il en apparaissait çà et là une violette ou une bleue, plus tard, entre les cellules devenues pour la plupart violettes ou bleues il en restait quelques-unes d'un rouge pur, etc.

Dans la plupart des cas ce changement spontané de couleur ne va pas aussi loin que chez le *Cissus*, mais seulement jusqu'au violet-pourpré ou au violet, modification analogue à celle qu'éprouvent les pétales des roses rouges en se flétrissant. Dans ces cas, toutefois, le changement de couleur peut toujours être exalté par l'addition de liquides alcalins, d'ammoniaque par exemple. On observe alors, de même que pour les couleurs des pétales, de grandes différences spécifiques. C'est ainsi que, sous l'influence de l'ammoniaque étendue, la couleur pourpre du suc des cellules épidermiques du *Fagus silvatica atropurpurea* passe au violet, puis au vert-bleuâtre, et finalement au vert foncé assez pur ou à un vert plus noirâtre ; celle de l'épiderme de la face supérieure des feuilles de *Lobelia ignea* passe au vert-bleu noirâtre, celle de la face inférieure ordinairement au violet noirâtre ; celle du *Coleus* au violet, puis au bleu ou au vert bleuâtre ; il en est à peu près de même chez *Perilla Nankinensis*, *Sinningea purpurea*, *Pelargonium zonale*, *Ricinus Gibsoni*, *Rosa*. Le suc rouge de l'*Iresine Lindenii* devint, par l'action de l'ammoniaque, violet pur, celui de *Higginsia refulgens*, violet noirâtre ; celui de *Pellionea Devaueana*, vert noirâtre ; celui de *Tradescantia*, violet passant à l'indigo ; etc. Si l'alcali est ajouté en quantité plus considérable, ou que son action se prolonge, la couleur peut subir des altérations encore plus profondes et même disparaître, ainsi que nous l'ont suffisamment appris beaucoup de recherches antérieures, notamment celles de Naegeli et Schwendener et celles de Wiesner, pour ne pas remonter plus haut.

Quand la liqueur alcaline est ajoutée en petite quantité

et avec précaution, la matière colorante n'est pas extraite de la cellule, mais s'y conserve souvent, même après des variations de couleur très étendues, pendant des heures entières, sans changement visible; par suite, il est possible d'exécuter aussi sur ces cellules devenues alcalines, à titre de comparaison, des analyses spectrales quantitatives. Quelques-unes de ces analyses sont communiquées à la fin de notre travail (tabl. 12*b*, 13*d*, 14*c*, 16*c*, 19*b*) et representées graphiquement dans les fig. 12*b* (*Fagus*), 13*d* (*Lobelia*), 14*c* (*Coleus*), 16*c* (*Cissus*), 19*b* (*Ricinus*). Toutes se rapportent à des cellules qui, traitées avec précaution par un léger excès de carbonate d'ammoniaque, avaient pris une coloration constante.

De même que l'inspection directe, ces analyses indiquent dans la marche de l'absorption des différences beaucoup plus notables que celles relatives à la couleur des cellules acides normales. Néanmoins, toutes s'accordent en ces deux points: d'abord, que la perte totale de lumière est considérablement plus forte qu'elle ne l'est d'ordinaire en cas de réaction acide; ensuite, que le maximum de l'affaiblissement de la lumière a subi un grand déplacement vers le rouge et tombe en général dans le jaune près de D, ou encore plus près du rouge, tandis que le vert-bleuâtre et le bleu, fréquemment aussi le violet, sont beaucoup mieux transmis que le jaune et l'orange. D'après cela, le préjudice causé à l'assimilation par l'absorption de la lumière dans un suc cellulaire supposé *alcalin* serait, en tout cas, beaucoup plus grand qui celui occasionné par le suc acide réel. Sous ce rapport, la réaction acide du suc cellulaire a donc une importance physiologique évidente.

Les différences les plus frappantes des spectres de cellules rendues faiblement alcalines concernent en première ligne la présence ou l'absence d'étroites bandes d'absorption. De pareilles bandes apparaissent, par exemple, très nettement et en nombre double dans le spectre du *Cissus*, et aussi dans celui du *Lobelia*, quoique d'ailleurs en des points tout à fait différents pour chacun d'eux (comp. la fig. 13*d* avec

la fig. 16*c*). Dans d'autres cas (*Fagus*, *Coleus*, *Ricinus*, etc.), il ne se montre qu'un large obscurcissement estompé de l'orange, du jaune et du vert jaunâtre, sans maxima ni minima secondaires. D'autres différences prononcées consistent en un affaiblissement relatif plus ou moins grand du rouge, de l'indigo et du violet. Ces faits prouvent, tout au moins, une différence de composition du suc cellulaire chez des plantes d'espèces différentes, et ils paraissent difficilement compatibles avec l'opinion, très répandue, qu'on aurait affaire partout à une seule et même matière colorante (érythrophylle-anthocyane).

A cette conclusion, d'ailleurs, conduisent déjà nos mesures sur les cellules rouges normales. La marche de l'absorption dans ces cellules, chez des espèces différentes, est en effet, malgré l'incontestable accord général que nous avons constaté plus haut, encore assez différente quant aux détails (comp. les courbes 12 – 20). Les différences sont liées à l'espèce de la plante. Chez la même espèce, la marche offre une grande constance, à condition de n'opérer que sur des matériaux parfaitement frais. Des perturbations sont toutefois à craindre par le fait de la diminution d'acidité, lors de la mort des cellules. Pour décider si les différences observées chez différentes espèces ne dépendaient pas d'un degré différent d'acidité du suc cellulaire, j'ai toujours exécuté aussi des mesures sur des cellules fraîches qui avaient séjourné assez longtemps dans une solution à $\frac{1}{2}$ % de sel marin, faiblement aiguisée d'acide acétique. Pour l'œil, l'additon de cet acide ne change généralement pas la couleur rouge normale, ou n'y détermine tout au plus qu'une modification à peine perceptible. Aussi le photomètre microspectral donna-t-il pour l'absorption, dans les deux cas, une marche essentiellement la même (comp. tabl. et fig. 13*a* [frais] avec 13*c* [acide acétique], 14*a* avec 14*b*). Il y a donc indubitablement des différences spécifiques dans la composition du suc cellulaire rouge chez des plantes d'espèces différentes. Mais il n'entre pas dans notre plan de poursuivre l'examen de cette question et de celles qui s'y rattachent.

III. Résultats numériques des analyses spectrales, et remarques sur la technique des expériences microspectrométriques.

Les analyses de couleurs dont il a été question dans le texte, et dont les résultats sont consignés dans les tableaux de la fin, ont été exécutées en partie (Nos. 1—9*b* et 10*b*) en avril, mai et juin 1884, en partie dans le courant de l'été de 1886. Pour les premières, la source de lumière était la flamme d'un bec rond double de Sugg, d'un pouvoir éclairant de 75 bougies, flamme dont une image réduite environ an 10ième (linéairement) était formée exactement dans le plan de l'objet, au moyen d'une lentille collectrice de 11 cm. de diamètre et de 30 cm. de distance focale, du miroir plan et du condensateur d'Abbe. La hauteur de la flamme était maintenue constante par un régulateur de la pression du gaz d'Elster. Le centre de la partie éclairante de la flamme était projeté juste au centre du champ visuel, qui se trouvait alors éclairé uniformément dans une étendue plus que suffisante (environ 2 mmq.). Pour amortir l'action thermique, un vase de verre à faces planes parallèles, large de 2 cm. et rempli d'une solution concentrée d'alun, était intercalé entre la flamme et le microscope. Un diaphragme de tout au plus 3 ou 4 mm. d'ouverture, placé entre le miroir et le condensateur, pourvoyait à la centralité de l'éclairage. Comme on pouvait presque toujours se servir d'un objectif faible (A de Zeiss; pour le No. 3*a* seulement il fallut l'obj. *C*, pour le No. 10*b* l'obj. *D*), et qu'on opérait en général avec une fente n'ayant que 0^{mm},20 ou tout au plus (No. 2) 0^{mm},25 de large, le spectre d'absorpton était ordinairement assez lumineux pour permettre des déterminations précises, même dans sa partie la plus réfrangible. La lumière du jour, généralement beaucoup plus favorable pour ces mesures, mais dont la variabilité continuelle, à l'époque en question, aurait été très perturbatrice, ne fut pas employée. Les expériences Nos. 1—10*b*, à l'exception de 3, 7, 8 et 10*a*,

ayant demandé, pour des raisons mentionnées dans le texte, l'emploi du prisme comparateur, ce n'est qu'à la faveur d'un ciel restant des heures entières absolument pur de nuages et de vapeurs — circonstance rare en Hollande, même en été, — et en faisant usage d'héliostats, qu'on aurait pu, condition de rigueur, réaliser entre la fente objective et la fente de comparaison l'égalité continue ou du moins la proportionnalité constante de l'élairement. Cela, d'ailleurs, eût en tout cas été très embarrassant, vu que, pour des raisons physiologiques, les mesures devaient être faites de préférence dans une chambre obscure, et dans la caisse obscure. Là même où l'emploi du prisme de comparaison était inutile, je ne fis usage de la lumière du jour, ou de la lumière solaire tempérée par un verre dépoli, que lorsqu'il fallait avoir recours à de forts grossissements. Tel était le cas dans les expériences Nos. 12—16*b*, 18*c*, 19*a* et *b*, et 20. Au reste, même en pareil cas, la lumière du jour peut presque toujours, et la lumière du gaz peut toujours être remplacée commodément et d'une manière satisfaisante par la *lumière électrique par incandescence*. Celle-ci réunit un si grand nombre d'avantages — clarté réglable et modifiable à volonté, constance de l'intensité lumineuse, continuité du spectre, absence d'effets calorifiques gênants, petit volume des appareils, — que son application à l'analyse microspectrale, spécialement à l'analyse quantitative, doit être regardée comme un progrès réel. Sauf les observations déjà citées, toutes les autres ont été exécutées à son aide, et aux chaudes recommandations que Van Heurck d'abord, puis Stearn, Stein, etc. ont faites de l'emploi de la lumière par incandescence dans les recherches microscopiques, je puis donner mon adhésion formelle.

Nos mesures, comme les observations microscopiques en général, n'exigeant que l'éclairage d'une très petite surface, des lampes minuscules et de très faibles forces électromotrices sont suffisantes. Fréquemment on peut même se contenter d'une petite lampe „Mignon", de la grosseur d'un pois, alimentée par deux ou tout au plus trois des petits éléments

de Grove dont M. du Bois-Reymond a introduit l'usage dans les recherches physiologiques. En général, toutefois, il vaut mieux prendre, comme plus solides et capables d'un plus grand développement de lumière, des lampes de dimensions un peu moins exiguës, dans lesquelles le maximum nécessaire puisse être atteint avec 3 ou 4 petits éléments de Grove, ou avec 3 éléments un peu plus grands [1]). Pour graduer la clarté rapidement et à volonté, depuis zéro jusqu'au maximum, je me sers de la *vis à lumière*, rhéostat d'une extrême simplicité, que j'ai décrit dans les *Onderzoekingen gedaan in het physiol. labor. te Utrecht* (3) X. 1887. Sous le rapport des prestations, des faibles dimensions, de la solidité, de la nature, sûreté et facilité du maniement, ce petit appareil est le pendant exact d'un simple robinet à gaz. Il ne demande qu'un espace de 3—4 cmq, et se laisse convenablement visser sur le support du microscope.

Pour obtenir l'effet lumineux le plus favorable, specialement dans le cas où l'on peut opérer sans l'emploi du prisme de comparaison, je dispose la petite lampe à incandescence à quelques centimètres au-dessus de la lentille du condensateur d'Abbe, sous le diaphragme, puis j'abaisse le condensateur jusqu'à ce qu'il se forme dans le plan de l'objet une image aussi lumineuse que possible, grossie environ au double, de l'arc incandescent entier [2]). Comme l'intensité lumineuse doit être parfaitement uniforme au centre du champ visuel, dans une étendue dépassant en tout cas la portée des largeurs de fente à employer, et que d'un autre côté l'incandescence de l'arc est moins vive vers les deux points où il est fixé, on doit ajuster de telle sorte que le milieu de la longueur

---

1) Ces petites lampes, ainsi que des lampes à incandescence de tout genre, sont fournies, parfaitement exécutées, par la maison Greiner et Friedrichs, à Stützerbach.

2) Avec l'aide du miroir du microscope et d'un petit miroir fixé latéralement dans la caisse obscure, la lampe à incandescence sert en même temps à éclairer l'échelle du microphotomètre.

et de la largeur de l'image de l'arc tombe exactement au centre du champ de vision. Il y a aussi, toutefois, des lampes dans lesquelles la partie la plus éclatante de l'arc ne se trouve pas exactement au milieu et dont la clarté, à partir du maximum, décroît inégalement vite dans les directions différentes. De pareilles lampes doivent être rejetées, ou du moins il faut leur donner une autre position, symétrique sous le rapport de la distribution de la clarté. En tout cas, il est nécessaire de s'assurer, par des essais préalables, si la condition de clarté uniforme dans la partie utilisée du champ visuel est remplie. La manière la plus simple est, après ajustement provisoire, de faire croître le courant depuis le minimum jusqu'au point tout juste où l'incandescence commence. En général, celle-ci se produira dans la partie centrale de l'arc, sur une étendue plus que suffisante, avec une simultanéité parfaite. Dans cette partie, et à l'œil, la clarté paraît alors, aussi pour toute autre intensité de courant, égale en tous les points. On obtient la certitude complète en vérifiant l'égalité des spectres des deux moitiés de fente, vérification qu'il ne faut jamais négliger et qui doit être faite dans au moins trois couleurs. — Pour amener aisément la petite lampe à incandescense dans la position convenable, j'ai trouvé très commode de la serrer, par la pièce qui porte les fils conducteurs, dans une petite pince universelle de Westien, laquelle à son tour glisse le long d'une tige, qu'on visse sur le support du microscope. Une fois obtenu, l'ajustement se maintient alors malgré les déplacements éventuels du microscope. Néanmoins, pour plus de sûreté, je visse toujours celui-ci sur la table où se font les observations. Quant à l'appareil d'Abbe, il doit être fixé à vis en toutes circonstances.

Lorsqu'il faut avoir recours au prisme de comparaison, je place au niveau de celui-ci, dans le prolongement de l'axe du tube qui y est fixé latéralement, une seconde petite lampe à incandescence, également portée par un bras vissé au microscope et permettant tous les déplacements nécessaires. A la

place du miroir, entre la lampe et le prisme, est disposée une faible lentille convexe, dont la distance à la lampe et au prisme peut varier dans les limites voulues. Le circuit conducteur qui va à cette lampe, et qui est dérivé du circuit conduisant à l'autre lampe, contient, comme celui-ci, une vis à lumière. Les mêmes trois éléments de Grove ou de Bunsen suffisent, dans tous les cas, à l'alimentation des deux lampes. De cette manière, rien n'est plus facile que d'égaliser, pour une clarté absolue quelconque, l'intensité lumineuse et la couleur des deux spectres. Le contrôle s'opère comme ci-dessus, par la comparaison des spectres, à largeur de fente égale, dans au moins trois couleurs.

Le circuit ne reste fermé que pendant le réglage et la mensuration, ce qui non seulement prévient l'usure trop rapide des lampes et de la pile, mais a aussi l'avantage de retarder autant que possible les modifications que la lumière pourrait faire subir à la matière colorante.

Une supériorité réelle de la lumière électrique par incandescence est, à mon avis, de se laisser graduer exactement et sans peine, au moyen de la vis à lumière, suivant la clarté subjective de la région du spectre qu'on observe. Dans le jaune vif, il suffit généralement d'une lumière beaucoup plus faible que dans les parties obscures, aux extrémités du spectre. On peut admettre, comme règle générale, que dans chaque région du spectre les mesures doivent se faire à la lumière la plus faible qui permette de reconnaître encore nettement, dans cette région, de très petites différences de clarté. Outre l'avantage de pouvoir observer alors en conservant à l'œil, sur toute l'étendue du spectre, son maximum de sensibilité pour ces petites différences, et en préservant l'organe de toute fatigue inutile, on obtient encore ce résultat favorable d'affaiblir la lumière mêlée diffuse qui dans notre appareil, comme dans tous les autres appareils spectraux, s'étend sur le spectre et peut nuire considérablement à la saturation et à la pureté des couleurs. Avec la lumière du gaz ou des lampes à in-

candescence, cette influence préjudiciable se manifeste surtout en ce que, à cause de la très forte proportion de rouge dans la lumière de ces sources, l'indigo et parfois le bleu acquièrent une légère teinte violacée ou même deviennent complètement violets, et en ce qu'une buée lumineuse s'étend sur le rouge extrême et sur l'ultra-rouge. Quand on emploie la lumière solaire, outre ce dernier phénomène on constate plus spécialement une diminution générale de la saturation, qui naturellement s'accuse le mieux dans les parties les moins lumineuses du spectre. Comme c'est précisément dans ces parties extrêmes du spectre, à cause de leur faible action sur l'œil, qu'on est obligé d'avoir recours à des sources lumineuses très intenses, le rétrécissement de la fente et l'interposition d'étroits diaphragmes ne suffisent pas toujours à écarter complètement les perturbations dont il vient d'être parlé. On atteint aisément le but, toutefois, en intercalant entre la source lumineuse et l'objet, ou entre l'oculaire et l'œil, des verres colorés ne laissant passer essentiellement que les groupes de rayons qu'il s'agit d'observer. Pour l'observation dans le bleu et l'indigo, par exemple, on prendra le verre de cobalt, pour le rouge, le cuivre vitreux. Il va sans dire que des solutions colorées (liqueur cuprico-ammonique, bichromate de potasse) pourront éventuellement servir au même usage.

A l'égard de divers autres points concernant la pratique de la photométrie microspectrale, je renverrai à ce qui en a été dit antérieurement. [1]) Pour l'intelligence des tableaux et des courbes, les remarques suivantes sont encore nécessaires. Les régions du spectre dans lesquelles a été mesurée la perte de lumière sont indiquées chaque fois par les longueurs d'onde — exprimées en centièmes de micron dans les tableaux, en millièmes dans les courbes — qui occupaient le milieu du champ coloré observé à ce moment. La largeur de ce champ correspondait toujours à une différence de longueur d'onde

---

1) *Bot. Zeitg.* 1883, No. 6. — *Onderzoek.* etc. (3), IX, 1884, p. 1.

de 0,01 μ. Tout le reste du spectre était masqué par la glissière oculaire. Ainsi, λ 66 (soit λ 660) signifie que la mesure concerne le groupe de rayons compris entre λ 0,665 μ et λ 0,655 μ. La longueur du champ coloré était constante et choisie de telle sorte que, dans le rouge, elle surpassait deux à trois fois la largeur.

Les mesures se succédaient dans la direction du rouge au violet, ou inversement. Pour la plupart des régions du spectre je me contentais en général d'une seule mesure, ne répétant la mesure en sens rétrograde que pour trois à six points séparés par de larges intervalles, afin de m'assurer si quelque chose avait changé. Les expériences où cela était décidément le cas — ainsi qu'il arrive assez fréquemment, par exemple, chez les Vauchéries vivantes, par suite de déplacements des masses chlorophylliennes, chez les cellules épidermiques mourantes du Cissus, par suite de la diminution d'acidité — ont été exclues des tableaux, qui d'ailleurs, même des expériences parfaitement réussies, ne contiennent qu'un petit nombre de représentants. Dans les expériences Nos. 9*b*, 13*a*, 14*a*, 16*b*, 17*a* et *b*, il a été mesuré deux fois en chaque région du spectre, dans les expériences 10*b*, cinq fois.

Dans les tableaux, comme dans les courbes, les quantités de lumière transmises par l'objet coloré sont données en centièmes de la lumière incidente. Au moyen de ces nombres, il est facile de trouver par les tableaux de Vierordt les valeurs correspondantes des coefficients d'extinction, et de calculer telles constantes locales qu'on le désire. Ni l'un ni l'autre, toutefois, n'a été jugé nécessaire pour l'objet que nous avions en vue.

Explication des Tableaux numériques.

(représentés graphiquement sur la Pl. I.)

TABLEAU I.

1*a*. *Vaucheria* vivant, grosses cellules, très riches en chlorophylle.
1*b*. Deux *Vaucheria* vivants superposés.
2. Extrait alcoolique de feuilles vertes de *Hedera helix*, conservé une année à l'abri de la lumière. En couche de 2 mm. d'épaisseur. A considérer essentiellement comme solution de chlorophyllane.
3*a* et *b*. *Vaucheria* vivants.
4*a*. Feuille vivante de *Festuca* sp., injectée, sous la pompe pneumatique, d'eau contenant un peu de sel marin.
4*b*. Feuille vivante de *Hedera helix*, traitée de la même manière.
4*c*. Trois petites feuilles vivantes de *Hypnum*, superposées.

TABLEAU II.

5*a*. Feuille jaune de *Sambucus nigra* var. fol. aureis, injectée, sous la pompe pneumatique, d'une solution de sel marin à 0,1 °/₀.
5*b*. Deux feuilles semblables, superposées.
6*a*. *Hedera helix*. Extrait alcoolique fraîchement préparé, dans l'obscurité, avec des feuilles bouillies. En couche de 4 mm. d'épaisseur.
6*b*. *Vaucheria*. Epuisé pendant 2 heures, à la lumière diffuse du jour, par l'alcool concentré. En couche de 4 mm. d'épaisseur.
6*c*. Solution pareille à la précédente, mais préparée dans l'obscurité.
7*a*. *Vaucheria*, desséché rapidement et examiné dans l'huile d'olive pure.
7*b*. Idem, examiné dans l'eau.
7*c*. Comme 7*b*.

TABLEAU III.

8*a*. *Vaucheria*, mis vivant dans la glycérine concentrée.
8*b*. Idem, autre exemplaire.
9*a*. Solution du *Reinchlorophyll* de Tschirch dans l'alcool absolu, à l'abri de l'air, en couche épaisse de 4 mm.
9*b*. Solution analogue du *Chlorophyllgrün* de Hansen.
10*a*. Membrane cellulaire rouge-orange du bord d'une feuille de *Phormium tenax*, dans l'eau.

10*b*. Etat de repos, rouge, d'un *Haematococcus pluvialis* mesurant 0mm,05 en diamètre.
11*a*. Cellule épidermique de la face inférieure d'une feuille de *Tradescantia zebrina*.
11*b*. Cellule épidermique d'un pétale violet de *Cineraria*.

TABLEAU IV.

12*a*. Cellule épidermique fraîche, à suc cellulaire pourpre, de la face supérieure d'une feuille de *Fagus silvatica* var. atropurpurea, dans une solution de sel marin à ½ °/ₒ.
12*b*. Cellule pareille, devenue vert-noirâtre après addition de carbonate d'ammoniaque. N'avait pas changé depuis près de 1 heure.
13*a*. Cellule épidermique fraîche de la face supérieure d'une feuille de *Lobelia ignea*.
13*b*. Idem, de la face inférieure de la feuille.
13*c*. Idem, de la face supérieure de la feuille, après traitement par une solution de sel marin à ½ °/ₒ, additionnée d'acide acétique.
13*d*. Idem, de la face inférieure, devenue violet-noirâtre dans une solution de sel marin à ½ °/ₒ, additionnée d'ammoniaque.
14*a*. *Coleus Verschaffelti*. Cellule épidermique de la face supérieure d'une feuille violet-pourpre foncé, dans une solution de sel marin à ½ °/ₒ.
14*b*. Idem, traitée par une solution de sel marin additionnée d'acide acétique.
14*c*. Idem, devenue bleue dans une solution de sel marin additionnée d'ammoniaque.

TABLEAU V.

15*a*. *Iresine Lindenii*. Cellule épidermique fraîche de la face inférieure d'une feuille, dans une solution de sel marin à ½ °/ₒ.
15*c*. Idem, autre cellule.
16*a*. *Cissus discolor*. Cellule rouge-pourpre de la face supérieure d'une feuille fraîchement mise dans une solution de sel marin à ½ °/ₒ.
16*b*. Idem, devenue violette au bout de quelque temps.
16*c*. Cellule épidermique de la face inférieure d'une feuille de Cissus, devenue bleue dans une solution de sel marin légèrement additionnée d'ammonique. N'avait pas changé depuis 1½ heures.
17*a*. Cellule épidermique rouge-pourpre d'une jeune feuille d'un *Rosier-des-quatre-saisons*.
17*b*. Idem d'une jeune feuille d'*Ampelopsis hederacea*.

TABLEAU VI.

18*a*. Cellule piliforme à suc rouge-pourpre d'une jeune feuille de *Chêne*, fraîchement mise dans une solution de sel marin à ½ %.

18*b*. Cellule épidermique rouge-pourpre de la face supérieure d'une jeune feuille de *Vitis vinifera*. Même traitement.

18*c*. Cellule palissadique à suc rouge-pourpre d'une feuille de *Pelargonium zonale*. Même traitement.

19*a*. Grande cellule épidermique rouge de la face supérieure d'une feuille de *Ricinus Gibsoni*. Même traitement.

19*b*. Idem, devenue bleue après addition d'un peu de carbonate d'ammoniaque.

20. Cellule épidermique de la face tournée vers le soleil et devenue rouge d'une feuille de *Sedum album*. Fraîchement mise dans la solution de sel marin à ½ %.

Pour l'explication de la Pl. II, voir le texte, pages 24—26.

TABLEAU I.

λ.	1.		2.	3.		4		
	a.	b.		a.	b.	a.	b.	c.
71	62.5	65,5	72.0	77.8	85.0	65.0	64.0	68.5
70	—	50.0	70.0	—	65.0	—	—	—
69	—	31.5	60.8	—	34.0	30.0	34.4	36.0
68	—	16.0	34.0	10.7	16.5	12.5	—	—
67.5	8.8	14.0	—	—	15.5	9.2	11.1	14.5
67	—	15.0	8.4	—	18.0	10.5	—	—
66	24.5	20.0	—	—	27.0	17.5	21.1	25.0
65	41.5	28.0	17.6	44.7	40.0	22.5	26.7	35.5
64	40.5	30.0	27.2	—	42.0	29.8	33.3	43.0
63	37.5	27.0	36.0	43.0	41.0	29.0	31.1	42.5
62	39.8	31.0	32.8	—	42.0	33.5	35.6	47.5
61	42.5	36.0	30.0	51.5	48.5	33.5	36.1	54.5
60	48.5	42.0	36.0	55.8	55.0	39.0	40.0	53.5
59	49.0	41.0	48.0	52.2	54.0	37.0	36.0	56.8
58	48.2	39.5	51.2	—	58.0	41.5	37.7	57.5
57	50.0	47.0	50.4	60.2	63.0	47.5	41.7	62.5
56	53.5	51.5	40.0	65.7	63.5	48.5	43.3	61.5
55	53.7	48.0	40.0	62.8	58.0	50.0	45.6	66.0
54	50.0	43.5	30.4	57.0	60.5	50.0	44.4	64.0
53	41.5	41.0	28.0	53.5	58.0	48.5	42.2	60.0
52	37.5	32.5	37.2	47.2	50.0	37.0	35.0	52.0
51	30.8	24.5	27.2	30.5	33.0	24.5	26.7	37.0
50	19.5	18.0	25.6	18.0	24.0	15.5	12.8	21.0
49	17.5	14.5	28.0	15.7	20.0	11.0	9.0	14.5
48	18.5	17.0	20.0	—	25.5	10.5	10.0	12.5
47	16.5	16.0	—	—	23.0	8.0	8.3	11.5
46	12.0	19.0	12.8	—	19.0	9.0	7.8	10.5
45	11.0	17.0	9.6	9.2	16.0	8.5	7.2	12.0
44	8.5	14.5	7.6	—	16.0	7.5	5.0	8.5
43	5.5	15.0	5.6	6.7	16.0	6.5	4.5	8.0
42	—	—	5.2	—	—	—	—	—

TABLEAU II.

λ.	5.		6.			7.		
	a.	*b.*	*a.*	*b.*	*c.*	*a.*	*b.*	*c.*
71	80.0	62.5	65.0	70.0	85.0	85.0	90.0	92.5
70	75.0	55.0	59.0	65.0	—	75.0	70.0	77.0
69	62.5	52.0	56.0	60.0	73.5	20.0	29.0	38.0
68	50.0	41.0	41.0	42.5	67.5	13.5	10.5	14.5
67.5	—	—	—	—	—	11.5	9.0	12.0
67	50.5	34.0	16.0	16.0	33.0	12.0	10.5	15.5
66.5	—	—	—	15.6	29.0	—	—	—
66	56.0	39.0	11.0	16.0	—	21.0	26.0	35.0
65	62.5	50.0	20.0	34 0	45.0	25.0	29.0	55.0
64	70.5	52.0	31.0	42.0	60.0	26.5	30.0	63.0
63	70.0	51.0	35.0	42.5	61.0	22.0	26.0	56.0
62	71.0	50.5	39.0	37.5	53.5	20.5	26.5	57.0
61	73.0	52.0	39.0	39.5	60.0	28.0	34.0	65.0
60	74.5	52.0	41.5	44.0	64.0	42.5	44.0	71.0
59	76.5	51.0	45.0	47.0	57.5	37.5	40.0	64.0
58	75.5	50.0	46.0	47.0	60.0	47.0	42.0	66.0
57	72.0	50.5	45.0	51 0	62.5	54.0	50.0	73.0
56	69.0	49 5	48.0	55.0	65.0	66.0	64.5	77.0
55	69.5	49.0	50.0	56.0	67.5	66.5	62.5	76.0
54	71.0	47.0	51.5	56.0	66.0	59.0	56.5	75.0
53	65.0	37.0	51.0	56.0	65.0	45.0	51.0	71.5
52	55.0	24.0	50.0	55.0	62.5	32.0	28.0	57.0
51	35.0	13.0	46.5	52.0	60.0	14.0	14.0	37.5
50	24.0	6.0	40.0	45.0	54.0	9.5	10.0	20.5
49	17.0	3.5	25.0	27.0	34.0	10.5	9.0	14.5
48	20.0	3.0	11.0	15.0	17.5	14.0	14.0	15.5
47.5	—	—	—	13.5	—	—	—	—
47	17.0	2.5	4.0	16.0	12.5	11.0	16.0	18.0
46	14.0	1.5	4.5	15.5	11.0	9.0	14.5	11.0
45	13.5	1.0	3.5	11 0	7.5	10.0	14.0	10.5
44	10.0	2.0	4.0	10.0	6.5	9.5	17.0	12.5
43	9.0	—	3.5	9.5	6.0	6.0	14.0	12.0
42	—	—	3.0	—	—	—	—	—

Tableau III.

λ.	8.		9.		10.		11.	
	a.	*b.*	*a.*	*b.*	*a.*	*b.*	*a.*	*b.*
71	72.0	68.7	94.0	84.2	—	—	—	—
70	62.5	—	86.0	68.7	100.0	100.0	—	94.0
69	37.0	23.5	75.0	56.0	—	—	—	—
68	13.0	—	62.0	41.0	100.0	100.0	—	—
67.5	14.5	5.2	—	—	—	—	—	96.0
67	17.0	—	38.0	27.5	—	—	—	—
66.5	—	—	—	—	—	—	—	—
66	24.0	—	16.0	16.5	100.0	95.1	100.0	—
65.5	—	—	12.0	17.5	—	—	—	—
65	40.0	16.1	14.5	16.5	—	—	—	—
64	45.0	21.9	20.0	—	98.5	—	—	100.0
63	42.0	17.8	26.0	25.7	—	—	—	—
62	42.0	18.7	34.5	38.0	97.5	91.4	88.0	82.0
61	44.0	20.0	32.0	44.8	—	—	74.0	—
60	56.0	30.0	33.0	49.0	96.5	74.5	59.0	16.0
59	54.0	30 5	41.0	51.0	—	—	42.0	9.2
58	54.0	31.3	45.0	57.0	95.0	48.3	37.0	11.2
57	59.0	35.2	43.0	58.7	—	30.3	44.0	11.6
56	63.0	39.1	39.0	61.0	92.0	14.5	48 0	9.6
55	67.0	39.1	45.5	61.7	—	12.1	40.0	9.2
54	62.0	37.4	46.5	59.7	85.0	11.2	36.0	8.8
53	56 0	33.0	44.5	56.7	—	—	46 0	16.0
52	45.0	24.8	45.0	55.0	67.5	—	54.0	18.0
51	27.0	12.2	50.0	47.7	—	—	57.0	16.0
50	17.0	7.0	57.0	45.0	34.0	11.1	59.5	26.0
49	14.0	5.2	55.0	48.0	—	—	70.0	44.0
48	15.5	5.2	50.0	49.0	18.0	—	76.0	48.0
47	19.0	4.8	42 0	43.5	—	—	78.0	54.0
46	17.0	4.8	22.0	36.0	14.0	—	81.5	66.0
45	20.0	4.3	15.0	26.0	—	15.8	81.0	—
44	19.0	4.3	11.0	15.2	12.5	—	80.0	74.0
43	15.0	4.0	6.0	10.7	—	22.5	—	—
42	—	—	5.0	13.5	12.0	—	—	90.0

TABLEAU IV.

λ.	12.		13.				14.		
	a.	b.	a.	b.	c.	d.	a.	b.	c.
70	—	92.2	—	—	—	80.0	—	97.2	80.0
68	99.2	65.0	—	—	—	76 0	—	94.0	66.0
67	—	—	—	—	—	—	95.0	—	—
66	98.0	47.0	98.0	96.4	98.0	62.0	93.8	84.0	42.4
64	96.8	31.0	96.5	94.6	88 8	44.0	92.6	74.4	24.8
62	95.6	25.0	90.0	39.0	82.0	20.0	85.5	59.2	13.2
60	87.2	21.0	64.8	48.4	68.0	9.6	67.7	48.0	8.8
59	—	—	—	—	—	7.6	—	—	—
58	60.0	22.0	41.2	22.0	46.4	9.2	46.0	26.0	9.6
57	—	—	—	—	35.6	10.0	—	—	—
56	39.7	23.5	27.6	10.8	32.0	9.6	29.5	12.0	12.4
55	33.6	30.0	23.8	6.0	30.4	9.2	23.0	7.2	20.8
54	30.0	35.0	26.8	6.8	32.8	9.6	24.7	8.8	28.0
52	28.0	37.5	34.4	8.0	40.0	12.0	28.5	10.4	50.0
50	30.0	40.0	42.4	19.4	47.2	20.4	38.0	20.8	53.6
48	40 4	41.0	55.6	28.0	54.0	23.2	51.3	37.6	56.8
46	52.8	40.0	60.4	40.0	57.6	27.2	68.8	44.0	64.5
44	62.0	32.0	73.6	56.0	74.4	26.0	85.5	52.0	50.8
42	67.0	—	—	—	—	—	92.6	—	—

TABLEAU V.

λ.	15.		16.			17.	
	a.	b.	a.	b.	c.	a.	b.
70	100.0	100.0	99.0	—	92.5	98.0	100.0
68	—	—	99.0	99.0	65.0	—	—
67	—	—	94.0	—	—	97.0	100.0
66	100.0	100.0	90.6	91.0	26.5	—	—
65	—	—	86.0	—	—	—	—
64	99.0	98.0	81.6	70.5	12.0	97.0	100 0
63	—	—	72.0	52.0	9.0	—	—
62	88.0	—	64.4	44.5	10.7	94.2	98.0
61	—	—	54.4	40.5	11.3	81.0	—
60	70.0	66.0	46.0	44.0	12.5	65.0	82.0
59	—	—	36.0	40.5	9.0	58.0	—
58	41.0	—	18.0	26.2	7.0	39.6	36.0

λ.	15.		16.			17.	
	a.	*b.*	*a.*	*b.*	*c.*	*a.*	*b.*
57	—	—	10.0	20.0	9.0	—	—
56	20.0	14.5	7.2	17.0	10.0	24.4	14.0
55	14.0	11.0	6.0	14.5	12.0	20.0	11.2
54	14.5	11.5	6.8	16.0	14.0	17.6	10.4
53	16.5	11.9	8.4	17.0	—	18.8	11.6
52	19.0	13.5	10.4	21.0	26.0	20.4	12.0
51	—	—	—	24.0	—	—	14.0
50	32.3	19.5	23.2	31.0	50.0	28.8	18.8
49	—	—	—	—	—	—	24.8
48	55.0	44.5	38.0	45.0	57.5	46.0	30.5
46	76.0	70.5	56.8	57.0	65.0	67.2	40.0
44	80.0	82.0	82.0	73.0	82.0	80.0	42.0
42	—	—	—	—	100.0	77.6	50.0

Tableau VI.

λ.	18.			19.		20
	a.	*b.*	*c.*	*a.*	*b.*	
70	96.0	92.0	100.0	—	—	100.0
68	97.6	—	100.0	97.5	80.0	—
67	—	90.0	—	97.0	—	—
66	98.0	90.0	100.0	97.0	72.0	100.0
64	98.0	90.0	100.0	95.0	48.0	95.0
62	86.0	90.0	90.0	90.0	27.0	89.0
60	66.0	68.0	82.5	85.0	23.0	81.5
59	—	—	—	80.0	22.0	—
58	54.0	38.0	65.0	71.0	24.0	66.0
56	36.8	20.0	41.0	57.0	25.0	37.0
55	—	20.0	34.0	50.0	30.5	34.0
54	30.0	22.0	34.0	48.0	37.0	32.0
53	—	—	33.0	46.0	—	31.5
52	27.2	28.8	34.5	49.5	47.0	31.5
51	—	—	—	—	—	34.0
50	35.2	38.4	40.0	59.0	59.0	37.0
48	45.6	48.0	52.5	65.0	70.0	48.0
46	56.0	54.0	63.0	78.0	76.0	69.5
44	64.0	58.0	—	90.0	65.0	79.5
42	—	60.8	—	—	—	—

LA CONIQUE DANS L'ESPACE,

PAR

P. VAN GEER.

---

1. Dans son ouvrage bien connu: *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes*, au chapitre XV, M. O. Hesse indique comment une conique dans l'espace peut être représentée par une seule équation du second degré. Le sujet, toutefois, n'est pas traité à fond, et le chapitre se termine par cette remarque: „en tout cas, il s'ouvre ici une abondante source de développements intéressants." A ma connaissance, cette source n'a pas été l'objet de nouvelles recherches, ou, du moins, les résultats de ces recherches n'ont pas été publiés. M'étant moi-même occupé, depuis assez longtemps déjà, d'une semblable étude, je me propose de faire connaître ici les résultats obtenus, qui à coup sûr n'épuisent pas la matière, mais qui me semblent pourtant justifier pleinement l'assertion de M. Hesse.

En général, je m'en tiendrai à la notation et au mode de démonstration employés par M. Hesse, de sorte que mon travail pourra être regardé comme une suite et un complément au chapitre XV de son ouvrage. Je présenterai d'abord quelques considérations préliminaires, indispensables à la parfaite intelligence des développements ultérieurs, et que M. Hesse, ou bien a négligées, ou bien a traitées d'une manière trop sommaire.

Comme il ne sera question, dans ce Mémoire, que de surfaces et de figures du second degré, lesquelles constituent aussi les figures du second ordre et de la seconde classe, j'omettrai, pour simplifier, toute mention de ce genre.

2. Si $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ sont les coordonnées homogènes d'un point, de sorte que $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ représentent les coordonnées linéaires ordinaires par rapport à un système tri-axial parallèle dans l'espace, l'équation générale du second degré peut être mise sous la forme:

$$f(x_1x_2x_3x_4)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_2^3+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{14}x_1x_4+2_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0 \quad (1)$$

Les dérivées par rapport aux quatre variables sont:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}f'(x_1) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\tfrac{1}{2}f'(x_2) &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\tfrac{1}{2}f'(x_3) &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\tfrac{1}{2}f'(x_4) &= a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

En posant $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$, $f'(x_3)=0$, et tirant de ces équations les rapports mutuels de $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, on obtient les coordonnées du centre de la surface. Celui-ci est unique et situé à distance finie lorsque

$$\Delta \gtrless 0,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

représente le *discriminant* de la surface. Si les coordonnées du centre satisfont à l'équation $f'(x_4)=0$, elles satisfont aussi à celle de la surface, laquelle devient alors une *surface conique*. La condition est

$$H = 0,$$

où

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

est appelé le déterminant Hessien de l'équation (1).

Si l'on a simultanément

$$H = 0 \text{ et } \Delta = 0,$$

la surface est une *surface cylindrique,* le centre de la surface conique s'éloignant à l'infini.

En désignant par M, comme il est d'usage assez général, le mineur d'un terme du déterminant H, de sorte que M_{23} par exemple représente le mineur du terme a_{23}, on a $\Delta = M_{44}$, et les conditions de la surface cylindrique peuvent être écrites

$$H = 0, \ M_{44} = 0.$$

Si tel est le cas, il résulte de propriétés connues des déterminants que tout autre mineur, dont l'indice renferme le chiffre 4, s'annule également.

A-t-on, en outre,

$$M_{11} = 0,$$

tous les mineurs sont nuls dans H; l'équation (1) peut être décomposée en deux formes du premier degré, réelles ou imaginaires, et la surface se réduit à *deux plans.*

Enfin, s'il y aussi un mineur second, par exemple

$$M_{\substack{11\\22}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

qui soit égal à zéro, il en est de même de tous les mineurs seconds du déterminant H; l'équation (1) est alors un carré parfait, et les deux plans se confondent en un *plan unique.*

Ainsi, ces cas particuliers se laissent aisément déduire du déterminant Hessien.

3. Si

$$F = 0, f = 0$$

sont deux surfaces, l'équation

$$\Phi = \mu_1 F + \mu_2 f = 0 \,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

où μ_1 μ_2 désignent des quantités constantes arbitraires, représente une surface qui passe par l'intersection des deux surfaces données et qui par suite est déterminée à *une* condition près. Cette condition étant prise de manière que φ devienne une surface conique, il faut que le déterminant Hessien de φ — que nous indiquerons par $H(\varphi)$ — soit nul. Nous avons alors, en représentant les coefficients de F par des lettres majuscules et les coefficients correspondants de f par des minuscules:

$$H(\varphi) = \begin{vmatrix} \mu_1 A_{11} + \mu_2 a_{11}, \mu_1 A_{12} + \mu_2 a_{12}, \mu_1 A_{13} + \mu_2 a_{13}, \mu_1 A_{14} + \mu_2 a_{14} \\ \mu_1 A_{12} + \mu_2 a_{12}, \mu_1 A_{22} + \mu_2 a_{22}, \mu_1 A_{23} + \mu_2 a_{23}, \mu_1 A_{24} + \mu_2 a_{24} \\ \mu_1 A_{13} + \mu_2 a_{13}, \mu_1 A_{23} + \mu_2 a_{23}, \mu_1 A_{33} + \mu_2 a_{33}, \mu_1 A_{34} + \mu_2 a_{34} \\ \mu_1 A_{14} + \mu_2 a_{14}, \mu_1 A_{24} + \mu_2 a_{24}, \mu_1 A_{34} + \mu_2 a_{34}, \mu_1 A_{44} + \mu_2 a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

donnant une équation du quatrième degré en $\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$, de sorte que *par l'intersection de deux surfaces on peut en général mener quatre surfaces coniques.* Les centres forment les sommets d'un tétraèdre harmonique aux deux surfaces et aussi, par conséquent, à toutes celles qui passent par l'intersection.

Si maintenant $H(F)$ ou $H(f)$ est nul, l'équation (6) devient du troisième degré; par conséquent:

par l'intersection d'une surface avec une surface conique on peut encore faire passer trois surfaces coniques.

Si l'on à la fois $H(F) = 0$ et $H(f) = 0$, l'équation (6) est du second degré, donc:

par l'intersection de deux surfaces coniques peuvent encore passer deux autres surfaces coniques.

Si pour f existent les relations $H = 0$, $M_{11} = 0$ et $M_{14} = 0$, l'équation (6) se laisse encore réduire au second degré, de sorte que:

par l'intersection d'une surface et de deux plans on peut faire passer deux surfaces coniques; la droite qui joint les centres de

ces surfaces coniques est polaire réciproque de l'intersection des plans.

A-t-on enfin pour f non seulement $H=0$, $M_{11}=0$ et $M_{14}=0$, mais aussi $M_{\substack{11\\22}}=0$, l'équation (6) est ramenée au premier degré, et la surface conique correspondante touche F suivant l'intersection plane en laquelle s'est transformée f.

Les surfaces coniques que découlent de l'équation (6) deviennent des surfaces cylindriques pour celles des valeurs de $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ qui satisfont en outre à l'équation

$$\begin{vmatrix} \mu_1 A_{11}+\mu_2 a_{11}, & \mu_1 A_{12}+\mu_2 a_{12}, & \mu_1 A_{13}+\mu_2 a_{13} \\ \mu_1 A_{12}+\mu_2 a_{12}, & \mu_1 A_{22}+\mu_2 a_{22}, & \mu_1 A_{23}+\mu_2 a_{23} \\ \mu_1 A_{13}+\mu_2 a_{13}, & \mu_1 A_{23}+\mu_2 a_{23}, & \mu_1 A_{33}+\mu_2 a_{33} \end{vmatrix} = 0; \quad \ldots . (7)$$

de sorte qu'il dépendra de la nature et de la situation respective des surfaces données si une ou deux des surfaces coniques se transforment en surfaces cylindriques.

L'équation (7) étant du troisième degré, on pourra faire passer tout au plus trois surfaces cylindriques par l'intersection de deux surfaces quelconques. Si f se transforme en une surface cylindrique, l'équation (7) devient du second degré, de sorte qu'il n'existe plus, au maximum, que deux surfaces cylindriques; si f représente deux plans qui se coupent, qui sont parallèles ou qui coïncident, on ne peut faire passer, au plus, qu'une seule surface cylindrique par l'intersection avec F.

4. Cherchons par cette voie l'équation de la surface conique qui touche la surface $f=0$ suivant l'intersection avec un plan donné:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = 0.$$

L'équation cherchée peut être mise sous la forme

$$\mu f + (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4)^2 = 0,$$

où le facteur μ doit être déterminé au moyen de la condition que le déterminant H de cette équation soit nul. Cela s'exprime par la relation

$$\begin{vmatrix} a_{11}\mu+A_1^2, & a_{12}\mu+A_1A_2, & a_{13}\mu+A_1A_3, & a_{14}\mu+A_1A_4 \\ a_{12}\mu+A_1A_2, & a_{22}\mu+A_2^2, & a_{23}\mu+A_2A_3, & a_{24}\mu+A_2A_4 \\ a_{13}\mu+A_1A_2, & a_{23}\mu+A_2A_3, & a_{33}\mu+A_3^2, & a_{34}\mu+A_3A_4 \\ a_{14}\mu+A_1A_4, & a_{24}\mu+A_2A_4, & a_{34}\mu+A_3A_4, & a_{44}\mu+A_4^2 \end{vmatrix} = 0;$$

à l'aide de quelques réductions, ce déterminant se ramène à la forme

$$\begin{vmatrix} -\mu & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_3 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

équation qui est du premier degré par rapport à μ, de sorte qu'il n'y a qu'une surface conique qui y satisfasse; l'équation de cette surface devient:

$$\begin{vmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + H(f) . (A_1 x_1 + \\ + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4)^2 = 0. \quad (9)$$

Pour que cette surface conique se transforme en surface cylindrique, il faut aussi

$$\begin{vmatrix} \mu & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

mais alors on a en même temps, dans (8):

$$\begin{vmatrix} A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ A_3 & a_{13} & a_{33} & a_{33} \\ A_4 & a_{14} & a_{44} & a_{34} \end{vmatrix} = 0;$$

et cette cendition exprime que l'intersection passe par le centre de $f = 0$, ainsi qu'il convient.

5. Passons maintenant à des coordonnées tangentielles. Si

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0$$

est l'équation d'un plan en coordonnées ponctuelles, $A_1 A_2 A_3 A_4$ sont les coordonnées homogènes de ce plan, et $-\frac{A_4}{A_1}$, $-\frac{A_3}{A_2}$ $-\frac{A_4}{A_3}$ représentent les segments que le plan forme sur les axes des coordonnées. Ces quantités déterminent complètement le plan, même, par leur rapport mutuel, dans le cas où le plan passe par l'origine. Les coordonnées tangentielles variables étant appelées $(u_1\, u_2\, u_3\, u_4)$,

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4 = 0$$

devient l'équation d'un point dans l'espace, dont les coordonnées ponctuelles homogènes sont $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$. Entre les coordonnées d'un plan et celles d'un point situé dans ce plan, ou d'un point et d'un plan passant par ce point, il existe alors toujours la relation identique

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Pour passer de l'équation d'une surface en coordonnées ponctuelles à son équation en coordonnées tangentielles, nous posons

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) = 0,$$

et, en vertu des relations (2),

$$\tfrac{1}{2} f'(x_1) = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = u_1,$$
$$\tfrac{1}{2} f'(x_2) = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = u_2,$$
$$\tfrac{1}{2} f'(x_3) = a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = u_3,$$
$$\tfrac{1}{2} f'(x_4) = a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{44} x_4 = u_4,$$

Eliminant $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, on trouve, après quelques réductions,

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \varphi(u_1 u_2 u_3 u_4) = -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ u_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ u_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

ce qui réalise la transformation cherchée.

$$\varphi\,(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = 0$$

est maintenant l'équation de la surface en coordonnées tangentielles homogènes, de sorte que toute valeur de $(u_1\, u_2\, u_3\, u_4)$ qui satisfait à cette équation représente un plan tangent à la surface. Soit

$$\begin{aligned}\varphi\,(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = \alpha_{11} u_1^{\,2} + \alpha_{22} u_2^{\,2} + \alpha_{33} u_3^{\,2} + \alpha_{44} u_4^{\,2} + \\ + 2\alpha_{12} u_1 u_2 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 + 2\alpha_{13} u_1 u_3 + 2\alpha_{14} u_1 u_4 + \\ + 2\alpha_{24} u_2 u_4 + 2\alpha_{34} u_3 u_4 = 0, \;.\;.\; (12)\end{aligned}$$

le développement de cette équation. Les coefficients de l'équation développée sont alors, en vertu de (11), déterminés par

$$\alpha_{11} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix} = \frac{M_{11}}{H},$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{H}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix} = \frac{M_{12}}{H} \text{ etc.};$$

de sorte que chaque coefficient α est égal au mineur correspondant dans H, divisé par H.

Désignons par H_1 le déterminant Hessien de (12), c'est-à-dire posons

$$H' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}$$

et substituons les valeurs

$$\alpha_{11} = \frac{M_{11}}{H},\; \alpha_{12} = \frac{M_{12}}{H},\; \alpha_{13} = \frac{M_{13}}{H}, \text{ etc.};\;.\;.\; (13)$$

il vient alors, d'après une propriété connue des déterminants [1]),

$$H' = \frac{1}{H^4}\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44}\end{vmatrix} = \frac{H^3}{H^4},$$

1) Voir, entre autres, Houël, *Théorie et appl. des déterminants* § VII. 1.

ou $$HH' = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

De la même manière, on trouve

$$a_{11} = \frac{M'_{11}}{H'},\ a_{12} = \frac{M'_{12}}{H'},\ a_{13} = \frac{M'_{13}}{H'},\ \text{etc.} \quad \ldots \quad (15)$$

Les formules (13), (14) et (15) donnent les relations simples et symétriques qui permettent d'effectuer facilement le passage des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles et *vice versâ*. Il n'y a d'exception que pour $H = 0$, cas où la surface ne peut être représentée qu'en coordonnées ponctuelles et non en coordonnées tangentielles, tandis que pour $H' = 0$, c'est précisément l'inverse.

6. Posons maintenant:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\varphi'(u_1) &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 + \alpha_{14}u_4 = 0,\\
\tfrac{1}{2}\varphi'(u_2) &= \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_1 + \alpha_{23}u_3 + \alpha_{24}u_4 = 0,\\
\tfrac{1}{2}\varphi'(u_3) &= \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 + \alpha_{34}u_4 = 0,\\
\tfrac{1}{2}\varphi'(u_4) &= \alpha_{14}u_1 + \alpha_{24}u_2 + \alpha_{34}u_3 + \alpha_{44}u_4 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Les valeurs de $(u_1\ u_2\ u_3\ u_4)$ qui résultent des trois premières de ces équations déterminent le plan polaire de l'origine; si elles satisfont aussi à la quatrième, tous les pôles sont situés dans ce plan, et comme les points de la surface peuvent également être compris parmi ces pôles, tous ces points tombent dans un même plan et la surface se change en une *conique*, ainsi que M. Hesse l'a fait voir le premier. La condition pour que cela arrive est donc

$$H' = 0;$$

c'est le cas exceptionnel, ci-dessus mentionné, où la surface ne peut être représentée en coordonnées ponctuelles, pas plus que la surface conique ne peut l'être en coordonnées tangentielles.

Si, outre $H' = 0$, on a $M'_{44} = 0$, le plan de la conique passe par l'origine du système des coordonnées. Si, dans H', tous les premiers mineurs sont nuls, l'équation est décomposable en deux facteurs linéaires, et la conique se réduit à deux points isolés; a-t-on, de plus,

$$M_{\substack{11\\22}} = 0,$$

la droite qui joint ces points passe par l'origine; et si tous les seconds mineurs sont nuls, l'équation est un carré parfait et ne représente qu'un point unique; — aucun de ces cas ne peut être exprimé, en coordonnées ponctuelles, par une équation unique, pas plus que ne peuvent l'être, en coordonnées tangentielles, les cas où la surface se change en une surface cylindrique, ou en deux plans qui se coupent, sont parallèles ou coïncident.

7. Prenons deux surfaces en coordonnées tangentielles

$$\Phi = 0 \text{ et } \varphi = 0,$$

et formons l'équation

$$\psi = \mu_1 \Phi + \mu_2 \varphi;$$

$\psi = 0$ représente alors une surface qui est touchée par les plans tangents communs à Φ et à φ, et qui est entièrement déterminée par une condition supplémentaire unique. En prenant, pour celle-ci, la condition que la surface se transforme en une section conique, on doit avoir

$$H(\psi) = 0,$$

ce qui fournit de nouveau une équation du quatrième degré en $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, de la forme

$$\begin{vmatrix} \mu_1\alpha'_{11}+\mu_2\alpha_{11}, & \mu_1\alpha'_{12}+\mu_2\alpha_{12}, & \mu_1\alpha'_{13}+\mu_2\alpha_{13}, & \mu_1\alpha'_{14}+\mu_2\alpha_{14} \\ \mu_1\alpha'_{12}+\mu_2\alpha_{12}, & \mu_1\alpha'_{22}+\mu_2\alpha_{22}, & \mu_1\alpha'_{23}+\mu_2\alpha_{23}, & \mu_1\alpha'_{24}+\mu_2\alpha_{24} \\ \mu_1\alpha'_{13}+\mu_2\alpha_{13}, & \mu_1\alpha'_{23}+\mu_2\alpha_{23}, & \mu_1\alpha'_{33}+\mu_2\alpha_{33}, & \mu_1\alpha'_{34}+\mu_2\alpha_{34} \\ \mu_1\alpha'_{14}+\mu_2\alpha_{14}, & \mu_1\alpha'_{24}+\mu_2\alpha_{24}, & \mu_1\alpha'_{34}+\mu_2\alpha_{34}, & \mu_1\alpha'_{44}+\mu_2\alpha_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

où α' désigne les coefficients de l'équation Φ, α les coefficients correspondants de φ.

Entre l'équation (17) et l'équation correspondante (6) en coordonnées ponctuelles, il existe un rapport remarquable, que nous allons développer.

En premier lieu, les coefficients de $\mu_1{}^4$ et $\mu_2{}^4$ dans (17) sont, d'après la relation (14), les valeurs inverses des coefficients correspondants de (6).

En second lieu, le coefficient de $\mu_1{}^3\mu_2$ dans (17) est

$$\Sigma \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha'_{12} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha'_{13} & \alpha'_{23} & \alpha'_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha'_{14} & \alpha'_{24} & \alpha'_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

où le signe Σ indique qu'on doit donner l'accent alternativement à chaque colonne, puis prendre la somme pour ces quatre termes. Mais, d'après les relations (13), (14), (15), on peut écrire pour le résultat:

$$\frac{\Sigma(\alpha_{14}M'_{14}+\alpha_{24}M'_{24}+\alpha_{34}M'_{34}+\alpha_{44}M'_{44})}{H'} =$$

$$= \frac{1}{H'H}\Sigma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & A_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & A_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & A_{44} \end{vmatrix};$$

et cette expression est exactement, au dénominateur près, le coefficient de $\mu_1\mu_2{}^3$ dans (6). Dans ce dénominateur, H' représente le déterminant Hessien de F, et H celui de f dans l'équation (5).

De même, le coefficient de $\mu_1\mu_2{}^3$ dans (17) est, au dénominateur près, égal à celui de $\mu^3{}_1\mu_2$ dans (6). Pour ce qui concerne, enfin, le coefficient de $\mu_1^2\mu^2{}_2$, il peut être représenté dans (17) par

$$\Sigma \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha'_{12} & \alpha'_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{34} \\ \alpha'_{13} & \alpha'_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha'_{14} & \alpha'_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

où, chaque fois, deux colonnes doivent être affectées d'accents, puis sommées. On peut écrire pour le resultat:

$$\Sigma\Sigma \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{11} & \alpha'_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'après une propriété des déterminants, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{12} & \alpha'_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{H'^2} \begin{vmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{12} & M'_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{H'} \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{34} & M_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix};$$

d'où il suit que le coefficient en question est égal au coefficient correspondant de (6), affecté du dénominateur HH'.

On voit donc que, après multiplication des termes par ce dénominateur commun, l'équation (17) est entièrement identique à l'équation (6), sauf que μ_1 est remplacé par μ_2 et réciproquement; les racines de la première équation sont donc l'inverse de celles de la seconde, mais à la condition que pour aucune des surfaces le déterminant Hessien ne soit nul.

8. Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, l'équation

$$\psi = \mu_1 \Phi + \mu_2 \varphi = 0$$

représente une surface qui est touchée par les plans tangents communs à Φ et à φ. Or, lorsque $H(\psi) = 0$, la surface se transforme en section conique; cette équation étant du quatrième degré en $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, on voit qu'entre les plans tangents communs à deux surfaces on peut tracer quatre coniques, pourvu que ni l'une ni l'autre de ces surfaces ne soit une surface conique. Mais si l'une des deux est une section conique, l'équation devient du troisième degré en $\frac{\mu_1}{\mu_2}$; de sorte que, entre les plans qui touchent une surface et une conique, on peut encore tracer trois coniques. L'autre surface est-elle également une conique, l'équation en $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ est ramenée au second degré; de sorte que les plans tangents communs à deux coniques dans l'espace touchent, en outre, deux autres coniques.

Quand une des surfaces est réduite à deux point isolés, l'équation en $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ devient du second degré; d'où il suit que *deux surfaces coniques, qui touchent une même surface, se coupent suivant deux courbes planes.*

Lorsque φ est un carré parfait, de sorte que $\varphi = 0$ ne représente qu'un point unique, l'équation en $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ devient du premier degré. La valeur qui en résulte, substituée dans ψ, fournit la conique suivant laquelle la surface donnée est touchée par la surface conique qui a pour centre le point donné.

Soit

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0$$

l'équation du point, et

$$\varphi(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$$

celle d'une surface quelconque; un calcul tout semblable à celui développé au n° 4 conduit alors, pour la conique suivant laquelle la surface conique ayant son centre au point donné touche la surface donnée, à l'équation suivante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ a_2 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ a_3 & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ a_4 & \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \varphi(u_1 u_2 u_3 u_4)$$

$$+ H'(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4)^2 = 0 \quad . \; . \; . \; (18)$$

9. Soit de nouveau

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

une surface représentée en coordonnées ponctuelles, et

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0$$

un plan quelconque; la condition que le plan soit tangent à la surface est alors, d'après (11), exprimée par

$$\begin{vmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

sauf dans le cas où la surface donnée est une surface conique. Dans ce cas, en effet, le plan tangent doit passer par

le centre, et à la condition précédente il faut donc ajouter celle-ci:

$$\begin{vmatrix} A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{vmatrix} = 0.$$

Soit de même

$$\varphi(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$$

une surface en coordonnées tangentielles, et

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0$$

l'équation d'un point quelconque; on a alors, pour que le point se trouve sur la surface, la condition

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ a_2 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ a_3 & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ a_4 & \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

sauf, de nouveau, dans le cas où la surface se change en une conique; ce cas exige la condition supplémentaire:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ a_2 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ a_3 & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \\ a_4 & \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que le point $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ est situé dans le plan de la conique.

10. La conique dans l'espace, en coordonnées ponctuelles, étant représentée d'une manière générale comme l'intersection d'une surface quelconque et d'un plan quelconque, et en conséquence donnée par les deux équations:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \\ + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{24} x_2 x_4 + \\ + 2a_{34} x_3 x_4 = 0, \ldots \quad (21)$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

on demande de déterminer l'équation unique qui représente cette conique en coordonnées tangentielles.

L'équation (18) est celle de la conique suivant laquelle une surface conique à centre donné touche une surface. Si nous prenons pour ce centre le pôle du plan donné, la conique devient celle qui est demandée ici.

Cherchons donc, en premier lieu, les coordonnées $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ du pôle du plan (22) par rapport à la surface (21). Elles résultent des équations qui expriment que le plan polaire de $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ coïncide avec le plan (22), équations qui sont

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_2 + a_{14}\alpha_4 = A_1, \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = A_2, \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = A_3, \\ a_{14}\alpha_1 + a_{24}\alpha_2 + a_{34}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4 = A_4, \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (24)$$

on en déduit:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u_4 = -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

où H représente le déterminant Hessien de (21), de sorte que, en vertu de (14), on a $H'(\varphi) = \frac{1}{H}$

Le facteur de $\varphi(u_1u_2u_3u_4)$ dans l'équation (18) devient, en y substituant les $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ donnés par (24) et les coefficients α donnés par (13),

$$\begin{vmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

On a aussi, en vertu de (11),

$$\varphi(u_1 u_2 u_3 u_3) = -\frac{1}{H}\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ u_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ u_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix};$$

de sorte que, après ces substitutions, l'équation (18) prend la forme:

$$\begin{vmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ u_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ u_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{34} \end{vmatrix}^2 = 0; \quad . \; . \; (25)$$

pour laquelle on peut écrire, après réduction:

$$H \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ u_1 & A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ u_2 & A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ u_3 & A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ u_4 & A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

Cette équation contient la solution du problème proposé et détermine complètement la conique dans l'espace qui, en coordonnées ponctuelles est représentée par les deux équations (21) et (22). Après ordonnance et réunion des termes semblables, elle renferme huit constantes indépendantes, c'est-à-dire quatre de moins que n'en renferme le système des deux équations susdites.

Lorsque, toutefois, la surface donnée (21) est une surface conique, de sorte que $H = 0$, l'équation (26) devient indéterminée. Pourtant, la conique restant entièrement déterminée,

on doit pouvoir l'exprimer en coordonnées tangentielles. A cet effet, voici comment nous procédons. La conique qui résulte de l'intersection de la surface

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = 0$$

par le plan

$$V(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

est aussi l'intersection de la surface

$$\varphi = f + \lambda V^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

par le plan V. Or, lorsque $f = 0$ est une surface conique, $\varphi = 0$, pour une valeur quelconque de λ, n'est pas une surface conique. En remplaçant donc $f = 0$ par $\varphi = 0$, l'équation (26) redeviendra complètement déterminée. Cette substitution donne en effet

$$H = \lambda \begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{1} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ A_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots (28)$$

expression qui, pour chaque valeur finie de λ différente de zéro, fournit une valeur finie. L'autre partie du premier membre de l'équation (26) reste la même et conserve une valeur déterminée.

Prenons pour exemple le cercle, intersection de la surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et du plan

$$x + y + z = r.$$

Par substitution convenable, l'équation (26) donne pour ce cas

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -r \\ u_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_4 & -r & 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut s'écrire:

$$r^2 (u_1^{\,2} + u_2^{\,3} + u_3^{\,2}) - 2r^2 (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) -$$
$$- 2r (u_1 u_4 + u_2 u_4 + u_3 u_4) = 3u_4^{\,2}, \quad . \; . \; . \quad (29)$$

équation qui représente le même cercle en coordonnées tangentielles. L'équation (29) peut être mise sous la forme

$$(ru_1 + ru_2 + ru_3 + ru_4)^2 - 2 (r^2 u_1^{\,2} + r_2 u_2^{\,2} +$$
$$+ r_2 u_3^{\,2} - u_1^{\,2}) = 0,$$

d'où il ressort que le cercle se trouve dans le plan du contact de la surface sphérique donnée avec la surface conique dont le centre a pour équation

$$ru_1 + ru_2 + ru_3 + ru_4 = 0,$$

ainsi qu'il est facile de le reconnaître.

11. Considérons maintenant la surface conique ayant son centre à l'origine et représentée, en coordonnées ponctuelles, par l'équation:

$$K = a_{11} x_1^{\,2} + a_{22} x_2^{\,2} + a_{33} x_3^{\,2} + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 +$$
$$+ 2a_{23} x_2 x_3 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

et coupons cette surface par un plan:

$$V = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (31)$$

qui ne passe pas par le centre; cette intersection donne lieu à une conique, dont il s'agit de déterminer l'équation en coordonnées tangentielles.

A cet effet, au lieu de la surface conique, prenons la surface

$$\varphi = K + \lambda V^2 = 0,$$

l'équation peut alors, d'après (26) et (28), être représentée par

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ u_1 & A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ u_2 & A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ u_3 & A_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ u_4 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui, écrit sous la forme:

$$\begin{vmatrix} 0 & A_4u_1-A_1u_4, & A_4u_2-A_2u_4, & A_4u_3-A_3u_4 \\ A_4u_1-A_1u_4, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ A_4u_2-A_2u_4, & a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, \\ A_4u_3-A_3u_4, & a_{13}, & a_{23}, & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad (32)$$

donne l'équation cherchée en coordonnées tangentielles.

Si dans cette équation l'on pose $u_4 = 0$, les plans tangents à la conique passent par l'origine, de sorte que le reste de l'équation représente la surface conique qui touche la conique et dont le centre se trouve à l'origine. C'est là le seul cas où une surface conique peut être représentée en coordonnées tangentielles. Son équation devient alors:

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{12} & a_{23} & a_{23} \\ u_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

et est, en coordonnées tangentielles, identique avec (30) en coordonnées ponctuelles.

Lorsque l'équation (33) est développée en

$$\alpha_{11} u_1^2 + \alpha_{22} u_2^2 + \alpha_{33} u_3^2 + 2\alpha_{12} u_1u_2 + 2\alpha_{13} u_1u_3 + 2\alpha_{23} u_2u_3 = 0, \quad (34)$$

l'équation (30) peut s'écrire dans la forme:

$$\frac{1}{M'_{44}} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ x_2 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ x_3 & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

où

$$M'_{44} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

aussi longtemps, du moins, que le déterminant des équations (30) et (31) n'est pas nul, ce que nous supposons ici.

12. Le problème inverse, à savoir: une conique dans l'espace étant donnée en coordonnées tangentielles, trouver les deux équations qui la représentent en coordonnées ponctuelles,

ce problème ne se laisse pas résoudre aussi catégoriquement. Car, une infinité de surfaces passant par la conique donnée, le problème est indéterminé. Si nous cherchons, toutefois, la surface conique à centre placé à l'origine et le plan, qui par leur intersection mutuelle produisent la conique, les calculs précédents fournissent de nouveau la solution complète.

Soit

$$\alpha_{11} u_1^2 + \alpha_{22} u_2^2 + \alpha_{33} u_3^2 + \alpha_{44} u_4^2 + 2 \alpha_{12} u_1 u_2 + 2 \alpha_{13} u_1 u_3 + \\ + 2 \alpha_{23} u_2 u_3 + 2 \alpha_{14} u_1 u_4 + 2 \alpha_{24} u_2 u_4 + 2 \alpha_{34} u_3 u_4 = 0 \text{ , (36)}$$

sous la condition

$$H' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (37)}$$

la conique donnée dans l'espace.

La surface conique, ci-dessus spécifiée, est représentée en coordonnées tangentielles par l'équation (34) et en coordonnées ponctuelles par l'équation (35).

Quant au *plan* de la conique, il est entièrement déterminé par l'équation (36), quelle que soit la surface sur laquelle la conique se trouve. Son équation en coordonnées ponctuelles peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_3 & x_4 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (38)}$$

de sorte que (35) et (38) contiennent la solution du problème. Dans ces équations n'entre pas, à la vérité, la quantité α_{44}; mais aussi, cette quantité n'est pas indépendante, elle est déterminée par la condition (37).

Toute surface menée par l'intersection de (35) et de (38) satisfait également au problème proposé.

Si, outre $H' = 0$, on a $M'_{44} = 0$, le plan de la conique passe, d'après l'équation (38), par l'origine. La surface conique (35) devient alors indéterminée. Provisoirement, nous exclurons ce cas particulier et admettrons, le choix de l'origine restant libre, que le plan de la conique ne passe pas par ce point, de sorte que M'_{44} ne peut pas s'annuler.

13. Nous sommes maintenant en état de rechercher comment la *nature* de la conique dépend des coefficients de l'équation (36). Ainsi, il est facile de reconnaître dans quel cas cette conique sera une parabole; car son plan devra alors être parallèle à un plan tangent à la surface conique, c'est-à-dire que, transporté à l'origine, il devra toucher cette surface.

Les coordonnées du plan mené par l'origine parallèlement au plan de la conique sont:

$$u_1 = M'_{14},\ u_2 = M'_{24},\ u_3 = M'_{34}.$$

Pour que ce plan soit tangent à la surface conique (34) on doit avoir:

$$\begin{aligned} M'_{14}\,(\alpha_{11}\,M'_{14} + \alpha_{12}\,M'_{24} + \alpha_{13}\,M'_{34}) &+ \\ + M'_{24}\,(\alpha_{12}\,M'_{14} + \alpha_{22}\,M'_{24} + \alpha_{23}\,M'_{34}) &+ \\ + M'_{34}\,(\alpha_{13}\,M'_{14} + \alpha_{23}\,M'_{24} + \alpha_{33}\,M'_{34}) &= 0. \end{aligned}$$

Il suit de là, en ayant égard à la condition (29):

$$- M'_{44}\,(\alpha_{14}\,M_{14} + \alpha_{24}\,M'_{24} + \alpha_{34}\,M') = \alpha_{44}\,M'^{2}_{44} = 0,$$

ou, puisque M'_{44} ne peut être nul,

$$\alpha_{44} = 0;$$

telle est donc la condition moyennant laquelle la conique (36) représente une parabole.

Pour trouver dans quel cas elle est une ellipse ou une hyperbole, il faut reprendre les choses de plus haut.

Revenons à la surface conique (30); transportons au centre de cette surface, parallèlement à lui-même, le plan sécant (31), dont l'équation devient alors

$$A_1\,x_1 + A_2\,x_2 + A_3\,x_3 = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

puis cherchons si les doites d'intersection sont imaginaires, coïncidentes ou réelles. Après que x_3 a été éliminé des équations (30) et (39), le discriminant de la forme du second degré en x_1 et x_2 devient:

$$\Delta = (a_{12}\, A_3^2 + a_{33}\, A_1\, A_2 - a_{23}\, A_1\, A_3 - a_{13}\, A_2\, A_3)^2 -$$
$$-(a_{11}A_3^2 + a_{33}A_1^2 - 2a_{13}A_1A_3)(a_{22}A_3^2 + a_{33}A_2^2 - 2a_{23}A_2A_3),$$

ce qui, après quelques réductions, peut s'écrire sous la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ A_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ A_3 & a_{23} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Le signe de cette forme n'est pas seulement invariant par rapport à toute transformation de coordonnées, mais il ne change pas non plus lorsque tous les signes sont renversés dans les équations (30) et (39), séparément ou simultanément.

Or, suivant qu'on a

$$\Delta \lesseqgtr 0,$$

les droites d'intersection sont imaginaires, coïncidentes ou réelles, et le plan parallèle (31) coupe par conséquent la surface conique (30) suivant une e l l i p s e, une p a r a b o l e ou une h y p e r b o l e.

Appliquons maintenant ce caractère simple et symétrique à la conique exprimée par (36) en coordonnées tangentielles. La surface conique est alors représentée par (35), et le plan sécant par (38). Ainsi, il suffit de transporter dans le discriminant (40) les coefficients empruntés à ces équations.

On a donc

$$a_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc. } \ldots\ldots \quad (41)$$

et

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= M'_{14} = -(\alpha_{14}\, a_{11} + \alpha_{24}\, a_{12} + \alpha_{34}\, a_{13}, \\ A_2 &= M'_{24} = -(\alpha_{14}\, a_{12} + \alpha_{24}\, a_{22} + \alpha_{34}\, a_{23}, \\ A_3 &= M'_{34} = -(\alpha_{14}\, a_{13} + \alpha_{24}\, a_{24} + \alpha_{34}\, a_{33}. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Cette substitution donne

$$\Delta = - \alpha_{44} M'_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{33} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ou, d'après (41),

$$\Delta = - \alpha_{44} M'^3_{44}.$$

Le signe de Δ étant tout ce qu'il importe ici de connaître, et M'_{44} ne pouvent être nul, nous pouvons prendre

$$\Delta = - \alpha_{44} M'_{44} = - \alpha_{44} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Selon que cette forme est négative, nulle ou positive dans l'équation (36), celle-ci représente une e l l i p s e, une p a r a-b o l e ou une h y p e r b o l e.

Tel est donc le caractère cherché, qui concorde avec le précédent, applicable seulement à la parabole. Il ne change pas lorsqu'on renverse les signes de tous les coefficients de (36). La seule condition qui doit être remplie, c'est que le plan de la conique ne passe par l'origine.

13. Au sujet du signe de la forme (43) on peut encore remarquer ce qui suit.

De la condition (37) il résulte

$$(M'_{11} : M'_{12} : M'_{13} : M'_{14}) = (M'_{12} : M'_{22} : M'_{23} : M'_{24}) =$$
$$= (M'_{13} : M_{23} : M'_{33} : M'_{34}) = (M'_{14} : M'_{24} : M'_{34} : M'_{44}),$$

donnant

$$M'^2_{14} = M'_{11} M'_{44},$$
$$M'^2_{24} = M'_{22} M'_{44},$$
$$M'^2_{34} = M'_{44} M'_{44},$$
$$M'^2_{13} = M'_{11} M_{33}, \text{ etc.};$$

d'où l'on voit que M'_{11}, M'_{22}, M'_{33}, M'_{44} ont le même signe. Lorsque $M'_{44} = 0$, on a aussi

$$M'_{14} = 0,\ M'_{24} = 0,\ M'_{34} = 0;$$

mais M'_{11}, M_{22}, M'_{33} conservent le même signe. De là se déduisent les propriétés suivantes:

Quand un déterminant symétrique, tel que H' dans (37), est nul, les mineurs de tous les termes de la diagonale ont le même signe. Si l'un de ces mineurs est nul, tous les mineurs des termes qui se trouvent dans la même ligne ou colonne disparaissent simultanément; mais les mineurs des autres termes de la diagonale conservent le même signe et ne peuvent s'annuler tous en même temps.

Il résulte de ces propriétés, appliquées à ce qui précède, qu'on peut donner aux coefficients de l'équation (36) des signes tels que, dans (37), les mineurs des termes de la diagonale, qui ne sont pas nuls, aient le signe négatif. Cela fait, la conique (36) sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que

$$\alpha_{44} \lesseqgtr 0.$$

Ainsi, dans l'équation (27), les mineurs en question possèdent le signe négatif, et on a $\alpha_{44} < 0$: la conique appartient au genre ellipse.

14. Voyons maintenant quelle influence la transformation des coordonnées exerce sur l'équation de la conique en coordonnées tangentielles.

Une rotation des axes des coordonnées s'exprime en coordonnées ponctuelles par:

$$\begin{aligned} x_1 &= a x'_1 + a' x'_2 + a'' x'_3 , \\ x_2 &= b x'_1 + b' x'_2 + b'' x'_3 , \\ x_3 &= c x'_1 + c' x'_2 + c'' x'_3 , \\ x_4 &= x'_4 . \end{aligned}$$

Ces relations étant transportées dans l'équation (31) du plan, elle devient

$$(aA_1 + bA_2 + cA_3)x'_1 + (a'A_1 + b'A_2 + c'A_3)x'_2 + \\ + (a''A_1 + b''A_2 + c''A_3)x'_3 + A_4 x'_4 = 0.$$

Les coordonnées d'un plan $(u_1 u_2 u_3 u_4)$ deviennent donc après cette transformation:

$$
\begin{aligned}
u'_1 &= a u_1 + b u_2 + c u_3, \\
u'_2 &= a' u_1 + b' u_2 + c' u_3, \\
u'_3 &= a'' u_1 + b'' u_2 + c'' u_3, \\
u'_4 &= u_4.
\end{aligned}
$$

Le déplacement parallèle du système des coordonnées, exprimé en coordonnées ponctuelles par

$$x_1 = x'_1 + a_1, \quad x_2 = x'_2 + a_2, \quad x_3 = x'_3 + a_3,$$

donne par substitution dans (31)

$$A_1 x'_1 + A_2 x'_2 + A_3 x'_3 + (A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4) = 0,$$

et a donc sur les coordonnées tangentielles une influence exprimée par

$$
\begin{aligned}
u'_1 &= u_1, \\
u'_2 &= u_2, \\
u'_3 &= u_3, \\
u'_4 &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + u_4.
\end{aligned}
$$

Réciproquement, en coordonnées tangentielles, le passage du système primitif à un nouveau système de coordonnées peut s'effectuer par la substitution

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= a u'_1 + a' u'_2 + a'' u'_3, \\
u_2 &= b u'_1 + b' u'_2 + b'' u'_3, \\
u_3 &= c u'_1 + c' u'_2 + c'' u'_3, \\
u_4 &= a_1 u'_1 + a_2 u'_2 + a_3 u'_3 + u'_4.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots . (44)
$$

Les trois premières de ces relations donnent la rotation des axes, la dernière seule est relative au déplacement de l'origine. Les trois premières ont la même forme et la même signification que dans la transformation correspondante des coordonnés ponctuelles, mais la dernière est à cet égard toute différente. C'est l'influence de celle-ci que nous examinerons d'abord.

15. Substituons donc la dernière des relations (44) dans

l'équation (36), qui, abstraction faite de la condition (37), représente une surface en général; cette équation devient alors:

$$(\alpha_{11} + 2\alpha_{14}a_1 + \alpha_{44}a_1^2)u'^2_1 + (\alpha_{22} + 2\alpha_{24}a_2 + \alpha_{44}a_2^2)u'^2_2 +$$
$$+(\alpha_{33}+2\alpha_{34}a_3+\alpha_{44}a_3^2)u'^2_3+2(\alpha_{12}+\alpha_{24}a_1+\alpha_{14}a_2+$$
$$+\alpha_{14}a_1a_2)u'_4u'_1 + 2(\alpha_{13}+\alpha_{34}a_1+\alpha_{14}a_3+\alpha_{44}a_1a_3)u'_1u'_3+$$
$$+2(\alpha_{23}+\alpha_{34}a_2+u_{24}a_3+\alpha_{44}a_2a_3)u'_2u'_3+2(u_{14}+\alpha_{44}a_1)u'_1u'_4+$$
$$+2(\alpha_{24}+\alpha_{44}a_2)u'_2u'_4+2(\alpha_{34}+\alpha_{44}a_3)u'_3u'_4+\alpha_{44}u'^2_4=0; \quad . \quad . \quad (45)$$

d'où l'on voit, en premier lieu, que α_{44} est un invariant de cette transformation et, par suite, de toute autre transformation de coordonnées, de sorte que tout caractère lié à cette quantité est également indépendant de la transformation.

Si α_{44} n'est pas nul, on peut poser

$$\alpha_{14} + \alpha_{44}a_1 = 0,$$
$$\alpha_{24} + \alpha_{44}a_2 = 0,$$
$$\alpha_{34} + \alpha_{44}a_3 = 0,$$

d'où

$$a_1 = -\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{44}}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{44}}, \quad \alpha_3 = -\frac{\alpha_{34}}{\alpha_{44}} \quad , \quad . \quad . \quad (46)$$

donnant pour l'équation (45):

$$(\alpha_{11}\alpha_{44}-\alpha^2_{14})u'^2_1+(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha^2_{24})u'^2_2+(\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha^2_{34})u'^2_3+$$
$$+\alpha^2_{44}u'^2_4+2(\alpha_{12}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{24})u'_1u'_2+2(\alpha_{13}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{34}u'_1u'_3+$$
$$+2(\alpha_{23}-\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{34})u'_2u'_3=0 \quad . \quad . \quad (47)$$

Un changement simultané des signes de u'_1 u'_2 u'_3 n'a pas d'influence sur cette équation, de sorte que celle-ci est satisfaite par deux plans tangents parallèles, menés à distance égale de part et d'autre de l'origine; il s'ensuit que celle-ci se trouve maintenant au centre de la surface, dont les coordonnées sont par conséquent déterminées par l'équation (46).

Mais si $\alpha_{44} = 0$, cette transformation ne peut s'opérer, car le centre s'éloigne alors à une distance infinie. Cette condition est donc applicable aux surfaces dépourvues de centre.

Il est facile de s'assurer que le déterminant H' de (45) est également un invariant de la transformation.

Lorsque α_{44} n'est pas nul, l'équation (47) peut, en cas de rotation des axes des coordonnées, être ramenée, par substitution des trois premières relations (44), à la forme

$$s_1 u_1^2 + s_2 u_2^2 + s_3 u_3^2 + \alpha_{44} u_4^2 = 0 \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

équation qui embrasse toutes les surfaces douées d'un centre.

Les valeurs de s sont, pour des axes rectangulaires, les racines de l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - s & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - s & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} - s & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; , \quad (49)$$

Quand, au contraire, $\alpha_{44} = 0$, l'équation (45) devient:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11} + \alpha_{14} a_1) u'^2_1 + (\alpha_{22} + 2\alpha_{24} a_2) u'^2_2 + (\alpha_{33} + 2\alpha_{34} a_3) u'^2_2 + \\ &+ 2(\alpha_{12} + \alpha_{24} a_1 + \alpha_{14} a_2) u'_1 u'_2 + 2(\alpha_{13} + \alpha_{34} a_1 + \alpha_{14} a_3) u'_1 u'_3 + \\ &+ 2(\alpha_{23} + \alpha_{34} a_2 + \alpha_{24} a_3) u'_2 u'_3 + 2\alpha_{14} u'_1 u'_4 + 2\alpha_{24} u'_2 u'_4 + \\ &\qquad + 2\alpha_{34} u'_3 u'_4 = 0 \quad . \; . \; . \quad (50) \end{aligned}$$

Dans cette équation, α_{14}, α_{24} et α_{34} ne peuvent pas être nuls simultanément. Mais, au moyen de la rotation préalable des axes, on peut faire disparaître les termes en $u'_1 \; u'_4$, $u'_2 \; u'_4$, $u'_1 u'_2$, ce qui revient à poser

$$\alpha_{14} = 0, \; \alpha_{24} = 0, \; \alpha_{12} = 0.$$

L'équation (50) se réduit alors à

$$\begin{aligned} &a_{11} u'^2_1 + \alpha_{22} u'^2_2 + (\alpha_{33} + 2\alpha_{34} a_3) u'^2_3 + 2(\alpha_{13} + \alpha_{34} a_1) u'_4 u'_3 + \\ &\qquad + 2(\alpha_{23} + \alpha_{34} a_2) u'_2 u'_3 + 2\alpha_{34} u'_3 u'_4 = 0, \end{aligned}$$

où a_{34} ne peut plus être nul.

En posant ensuite

$$\alpha_{33} + 2\alpha_{34} a_3 = 0,$$
$$\alpha_{13} + \alpha_{34} a_1 = 0,$$
$$\alpha_{23} + \alpha_{34} a_2 = 0,$$

ou $$a_1 = -\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{34}}, \quad a_2 = -\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{34}}, \quad a_3 = -\frac{\alpha_{33}}{2\alpha_{34}},$$

l'équation se transforme en

$$\alpha_{11} u_1^2 + \alpha_{22} u_2^2 + 2\alpha_{34} u_3 u_4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (51)$$

La condition $\alpha_{44} = 0$ exprime que $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ vérifient l'équation de la surface; cela veut dire que la surface a un plan tangent situé à distance infinie. Or, c'est là le caractère des surfaces dépourvues de centre, de sorte que celles-ci sont comprises dans l'équation (51).

16. Revenons maintenant à la conique dans l'espace. De la condition $H = 0$ il suit que dans l'équation du troisième degré (49) l'une des racines doit être nulle.

L'équation (48) devient ainsi:

$$s_1 u_1^2 + s_2 u_2^2 + \alpha_{44} u_4^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

La même condition fait disparaître l'un des carrés dans l'équation (51), qui par suite prend la forme

$$s u_1^2 + 2\alpha u_2 u_4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

L'équation (52) représente l'ellipse et l'hyperbole à centre situé à l'origine et à axes dirigés suivant les axes des coordonnées u_1 et u_2; l'équation (53) représente la parabole dont le sommet est à l'origine, tandis que son axe coïncide avec l'axe des u_2. Dans tous les cas, le plan de la conique est pris pour plan $U_1 U_2$.

En appliquant la caractère trouvé précédemment (n° 13), on voit que l'équation de l'ellipse peut être écrite sous la forme

$$a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 - u_4^2 = 0,$$

celle de l'hyperbole sous la forme

$$-a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 + u_4^2 = 0,$$

et celle de la parabole sous la forme

$$p_1 u_1^2 + 2 p_2 u_2 u_4 = 0.$$

L'équation générale de la conique est aussi toujours réductible à la forme

$$u_1^2 + 2 a u_2 u_4 + c u_4^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

Suivant que dans celle-ci $c \lesseqgtr 0$, la conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, dont le sommet est en chaque cas situé à l'origine, tandis qu'un axe coïncide avec U_2. L'équation (54) est donc l'équation rapportée au sommet, dans sa forme générale la plus simple.

Ainsi se trouve accomplie la détermination, quant à son genre, à sa position et à sa grandeur, de la coniqne dans l'espace donnée par l'équation générale (36).

Le plan de la conique a pour coordonnées les valeurs de $u_1 \, u_2 \, u_3 \, u_4$ qui résultent des équations

$$f'(u_1) = 0, \; f'(u_2) = 0, \; f'(u_3) = 0, \; f'(u_1) = 0, \; . \; (55)$$

tandis que le centre a, d'après (46), pour équation

$$\alpha_{14} u_1 + \alpha_{24} u_2 + \alpha_{34} u_3 + \alpha_{44} u_4 = 0; \; . \; . \; . \; . \; (56)$$

d'où il suit que la conique est une section centrale pour toutes les surfaces dont les équations possèdent des coefficients égaux α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{44}. De là vient qu'une parabole ne peut naître que des équations des surfaces dépourvues de centre.

17. Cherchons, pour terminer, dans quelles conditions la conique devient un cercle ou une hyperbole équilatère.

L'équation du troisième degré (49), qui détermine la longueur des axes, peut, après développement, être écrite sous la forme:

$$\alpha_{44} s^2 - [\alpha_{44}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) - (\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)] s^2 + \\ + (M'_{11} + M'_{22} + M'_{33}) s - H' = 0.$$

Pour $H'=0$, une des racines s'annule, ainsi que nous l'avons déjà remarqué. Les deux autres racines sont alors données par l'équation du second degré

$$\alpha_{44}s^2-[\alpha_{44}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})-(\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2)]s+ +(M'_{11}+M'_{22}+M'_{33})=0 \quad . \; . \; (57)$$

Le produit des racines de cette équation est $\dfrac{M'_{11}+M'_{22}+M'_{33}}{\alpha_{44}}$; or, en tant qu'ils ne soient pas nuls, ces mineurs et aussi M'_{44} ont tous le même signe; ce signe, combiné avec celui de α_{44}, décide donc de la nature des racines, d'une manière entièrement conforme à ce qui a été dit à cet égard au n° 13.

Lorsque dans l'équation (57) le coefficient de s est nul, les racines sont égales et de signe contraire. Par conséquent, la condition

$$\alpha_{44}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})=\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2$$

exprime que l'hyperbole est équilatère.

Si les racines de l'équation (57) sont imaginaires, l'ellipse elle-même devient imaginaire.

Pour le cercle, les racines doivent être égales et de même signe, et le premier membre de (57) doit donc être un carré parfait. Nous arriverons toutefois plus facilement à déterminer les conditions cherchées, en exprimant que, dans ce cas, la direction des axes est indéterminée dans le plan de la conique. Supposons d'abord que le plan de la conique passe par l'origine, de sorte que pour son équation on puisse prendre

$$a_{11}u_1^2+\alpha_{22}u_2^2+\alpha_{33}u_3^2+\alpha_{44}u_4^2+2\alpha_{12}u_1u_2+ +2\alpha_{13}u_1u_3+2\alpha_{23}u_2u_3=0,$$

où

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}=0;$$

la direction des axes est alors déterminée par les équations

$$(\alpha_{11} - s)\,a + \alpha_{12}\,b + \alpha_{13}\,c = 0,$$
$$\alpha_{12}\,a + (\alpha_{22} - s)\,b + \alpha_{23}\,c = 0,$$
$$\alpha_{13}\,a + \alpha_{23}\,b + (\alpha_{33} - s)\,c = 0,$$

L'indétermination de la direction dans le plan de la conique est exprimée par les conditions

$$\frac{\alpha_{11} - s}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22} - s} = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}},$$
$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}} = \frac{\alpha_{22} - s}{\alpha_{23}} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33} - s},$$

d'où il suit:

$$s = \alpha_{11} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{\alpha_{23}} = \alpha_{22} - \frac{\alpha_{23}\alpha_{12}}{\alpha_{13}} = \alpha_{33} - \frac{\alpha_{13}\alpha_{23}}{\alpha_{12}}. \quad (58)$$

Mais la valeur de la racine égale étant, d'après (57),

$$s = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{2}, \quad \dots\dots\dots \quad (59)$$

on a aussi

$$\frac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{\alpha_{23}} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{33}}{2},$$
$$\frac{\alpha_{23}\alpha_{12}}{\alpha_{13}} = \frac{-\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{33}}{2},$$
$$\frac{\alpha_{13}\alpha_{23}}{\alpha_{12}} = \frac{-\alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{33}}{2};$$

d'où l'on déduit ensuite

$$\alpha_{11} = -\alpha_{23}\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}} + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}\right),$$
$$\alpha_{22} = -\alpha_{13}\left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{12}} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{23}}\right),$$
$$\alpha_{33} = -\alpha_{12}\left(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}} + \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}}\right);$$

ainsi que

$$4\,\alpha_{12}^2 = \alpha_{33}^2 - (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2,$$
$$4\,\alpha_{13}^2 = \alpha_{22}^2 - (\alpha_{33} - \alpha_{11})^2,$$
$$4\,\alpha_{23}^2 = \alpha_{11}^2 - (\alpha_{22} - \alpha_{33})^2;$$

formes symétriques par lesquelles les trois premiers coefficients sont exprimés en fonction des trois suivants, et ceux-ci en fonction des trois premiers.

L'équation réduite du cercle prend la forme:

$$s(u_1^2+u_2^2)+u_{44}\,u_4^2=0\,,$$

où maintenant $\alpha_{44}<0$.

Le rayon du cercle est d'après (59)

$$r=\sqrt{\frac{s}{-\alpha_{44}}}=\sqrt{\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}}{-2\,\alpha_{44}}}\,,\quad\ldots\quad(60)$$

tandis que son plan est déterminé par

$$\frac{u_1}{\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{vmatrix}}=\frac{u_2}{\begin{vmatrix}\alpha_{33} & \alpha_{13}\\ \alpha_{13} & \alpha_{11}\end{vmatrix}}=\frac{u_3}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{vmatrix}}\,.$$

Pour déterminer maintenant dans l'équation générale les conditions cherchées, nous rapportons les relations (58) à l'équation (47). Elles deviennent ainsi:

$$(\alpha_{11}\alpha_{44}-\alpha_{14}^2)-\frac{(\alpha_{12}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{24})(\alpha_{13}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{34})}{(\alpha_{23}\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{34})}=$$

$$=(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)-\frac{(\alpha_{23}\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{34})(\alpha_{12}\alpha_{44}-\alpha_{24}\alpha_{14})}{(\alpha_{12}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{14})}=$$

$$=(\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2)-\frac{(\alpha_{13}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{14})(\alpha_{23}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{24})}{(\alpha_{12}\alpha_{44}-\alpha_{14}\alpha_{24})}\,,$$

pour lesquelles on peut écrire

$$\frac{M'_{12}}{\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{14}\\ \alpha_{24} & \alpha_{44}\end{vmatrix}}=\frac{M'_{13}}{\begin{vmatrix}\alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}}=\frac{M'_{23}}{\begin{vmatrix}\alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}}\,,$$

et aussi

$$M'_{14}\begin{vmatrix}\alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{24} & \alpha_{44}\end{vmatrix}=M'_{24}\begin{vmatrix}\alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}=M'_{34}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{14}\\ \alpha_{24} & \alpha_{44}\end{vmatrix}.$$

Dans ces conditions, le rayon du cercle est, d'après (60),

$$r=\sqrt{\frac{\alpha_{44}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})-(\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2)}{-2\,\alpha_{44}^2}}\,,$$

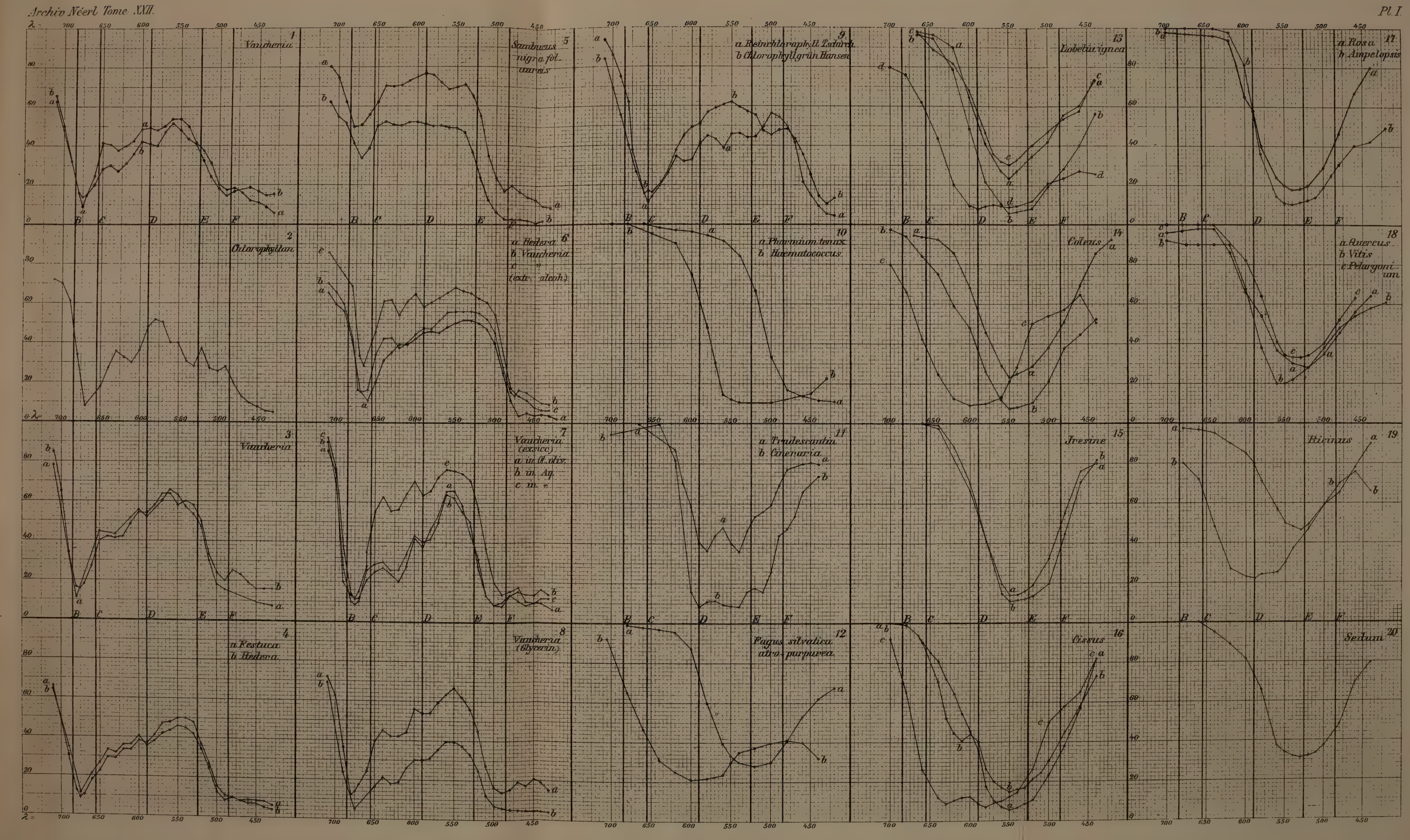
tandis que le plan est déterminé par les équations (55), et le centre par l'équation (56). Pour le rayon du cercle (27) on trouve ainsi $\frac{1}{3} r \sqrt{6}$, et pour l'équation de son centre

$$r(u_1 + u_2 + u_3) + 3u_4 = 0,$$

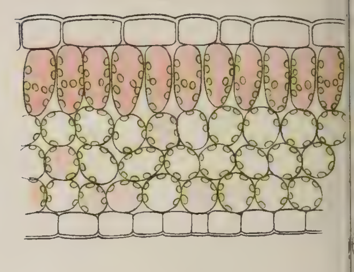
impliquant pour ce centre les coordonnées ponctuelles

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3} r;$$

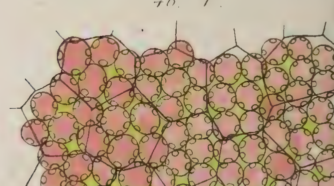
résultats entièrement conformes aux données.


1 Vaucheria
2 Chlorophyllan
3 Vaucheria
4 a Festuca b Hedera
5 Sambucus nigra fol. aureis
6 a Hedera b Vaucheria c " (extr. alcoh.)
7 Vaucheria (exsicc.) a in Ol. oliv. b in Aq. c in "
8 Vaucheria (Glycerin)
9 a Reinchlorophyll Tschirch b Chlorophyllgrün Hansen
10 a Phormium tenax b Haematococcus
11 a Tradescantia b Cineraria
12 Fagus silvatica atro-purpurea
13 Lobelia ignea
14 Coleus
15 Iresine
16 Cissus
17 a Rosa b Ampelopsis
18 a Quercus b Vitis c Pelargonium
19 Ricinus
20 Sedum

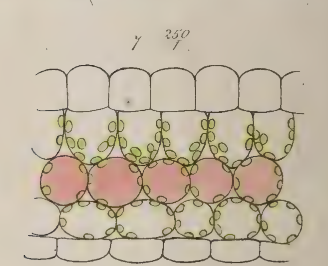
4a. $\frac{400}{1}$.



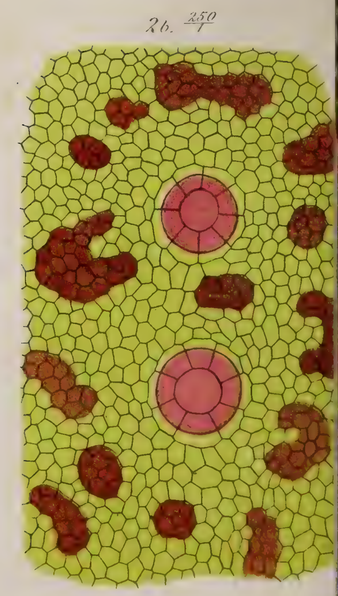
4b. $\frac{400}{1}$.

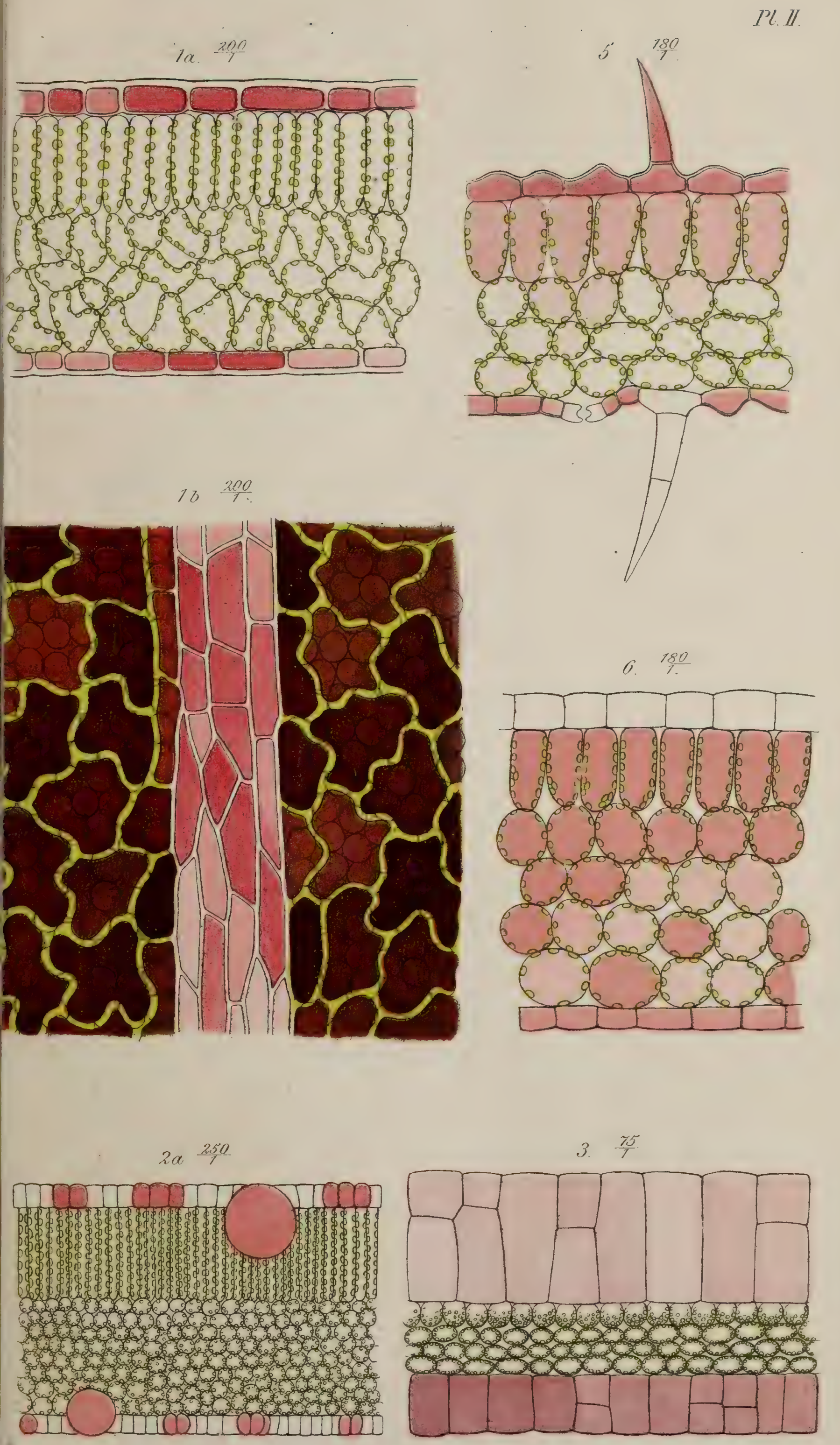


7. $\frac{250}{1}$.



2b. $\frac{250}{1}$




Pl. II.
1a. 200/1
5 180/1
1b 200/1
6. 180/1
2a 250/1
3. 75/1

PREMIÈRE LIVRAISON.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Un certain nombre de collections des tomes I à XX (années 1866—1886) sont mises à la disposition des Savants, Bibliothèques ou Etablissements publics au prix de 80 florins (168 francs, 134 Reichsmark). S'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des Sciences à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

TOME XXII. 2me et 3me Livraisons.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

J. BOSSCHA,

SECRÉTAIRE DE LA SOCIÉTÉ,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,**
C. H. D. Buijs Ballot, C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1887.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

RECHERCHES SUR LE SPHAEROPLEA ANNULINA AG.,

PAR

N. W. P. RAUWENHOFF.

Au commencement de l'année 1883, je reçus, entre autres objets figurant sur la liste annuelle des graines offertes par le Johanneum de Grätz, un certain nombre d'oospores ou zygotes du *Sphaeroplea annulina*, lesquelles, semées dans l'eau et placées en serre chaude, au mois de mars, germèrent au bout de quelques jours. Ces petites plantes m'inspiraient de l'intérêt, surtout à cause des puissants dépôts de cellulose (appelés fausses parois [*Scheinwände*] par Rabenhorst, *Kryptogamenflora*, 1863, p. 242) dont M. Leitgeb faisait mention dans une note de la liste précitée, et qui me semblaient devoir présenter quelque importance pour l'étude de la formation de la paroi cellulosique. En examinant de plus près les jeunes plantules et leur développement ultérieur, je constatai toutefois tant de détails curieux chez ces petits organismes, que leur histoire biologique me parut mériter d'être écrite. Il est vrai que, depuis longtemps déjà, le *Sphaeroplea annulina* avait trouvé en M. Cohn un éminent historien (*Monatsberichte d. Kön. Akad. d. Wissensch*, Berlin, mai 1855, p. 335—351, et *Annales des sciences naturelles*, 4e série, Botanique, V, p. 187—208) et que, par suite, il était relativement mieux connu que beaucoup d'autres Algues; mais, d'une part, le mémoire de M. Cohn,

bien qu'un chef-d'œuvre sous maints rapports, ne dit rien de plusieurs particularités que j'observais dans mes exemplaires; d'autre part, durant les 30 années écoulées depuis la publication de ce mémoire, la plante n'avait plus été, que je sache, l'objet de recherches spéciales, de sorte qu'un nouvel examen, à la lumière de nos connaissances actuelles, ne pouvait être regardé comme un travail superflu.

Dans l'étude de Cohn, le point essentiel était la découverte des deux organes sexuels chez une Algue verte, multicellulaire; découverte de grande importance, parce qu'à cette époque. dans toute la classe des Algues, on ne connaissait pas d'autres exemples de reproduction sexuelle que celui des Fucacées, mis au jour par le travail classique de Thuret [1]), et celui des Vauchéria, communiqué par M. Pringsheim [2]). A cette époque, d'ailleurs, les idées concernant la nature de l'acte fécondateur n'étaient pas encore parfaitement éclaircies, de sorte que l'auteur même de la découverte de la sexualité des Algues (Pringsheim) regardait celle-ci comme entièrement différente de la copulation, et que M. de Bary, dans son ouvrage sur les Conjuguées (p. 51—62), jugeait nécessaire de se livrer à de longs développements pour établir l'intime analogie de la copulation et de la fécondation. Depuis lors, l'état des choses a beaucoup changé, et aujourd'hui nous connaissons chez la plupart des Algues tant la reproduction asexuée que la reproduction sexuelle, qui alternent l'une avec l'autre, et dont la seconde peut avoir lieu de différentes manières, à ce point qu'elle sert même à diviser les Algues en groupes.

Néanmoins, même aujourd'hui, la plante nommée en tête de ce mémoire présente encore, dans son développement et sa reproduction sexuelle, nombre de détails dignes d'attirer l'attention de l'observateur.

Cela peut surprendre, après l'intérêt général et les recherches

---

[1]) *Ann. des sc. nat*, 3e Série, XVI, 4e Série, II et III.

[2]) *Monatsber. d. Berl. Akad.*, mars 1865.

multipliées dont les Algues ont été l'objet depuis tant d'années; mais la chose s'explique peut-être par la rareté de l'apparition du *Sphaeroplea annulina*. La plante, en effet, ne se montre que çà et là, à de longs intervalles de temps, et sous l'influence de circonstances déterminées. Ehrenberg, il y a bien des années, près de Berlin, l'a vue couvrir de grandes surfaces d'une couche rouge, qui faisait croire à une pluie de sang; aux environs de Brême, Treviranus a trouvé la plante en des lieux qui avaient été inondés; et Cohn, près de Breslau, l'a observée pour la première fois à la fin du mois d'octobre 1854, dans un champ de pommes de terre, que l'Oder avait envahi deux mois auparavant. Après que les eaux se furent retirées, le sol se couvrit peu à peu d'un réseau serré de filaments, qui était d'un rouge de minium en dessus, et coloré en vert à la face inférieure.

Postérieurement, aucune mention ne fut plus faite de l'apparition du *Sphaeroplea*, jusqu'à ce que, pendant l'été de 1882, M. Leitgeb le rencontra en grande abondance dans le bassin d'une fontaine près de Grätz [1]). L'occasion d'étudier la plante ne s'était donc, jusqu'alors, présentée que rarement.

Un résumé succinct des résultats provisoires de mes recherches fut communiqué à l'Académie des sciences d'Amsterdam dans la séance publique du 26 mai 1883, ainsi qu'il ressort du Procès-verbal de cette séance; une traduction allemande de cette communication parut, la même année, dans le *Botan. Centralblatt*, T. XV, n° 12, p. 398.

---

1) Des spores d'hiver ou zygotes de ces plantes sont nés, comme il a été dit plus haut, les spécimens qui ont servi à mes recherches. L'été suivant, d'après ce que M. Leitgeb m'écrivait au mois de décembre 1883, le *Sphaeroplea* reparut en grandes masses aux mêmes endroits. On verra plus loin que les plantes de cette seconde végétation, de même que celles provenant de mes cultures, furent également fertiles et donnèrent lieu à des générations nouvelles. Il est donc à présumer que, si l'attention reste fixée sur cet organisme, il sera dorénavant, comme toutes les autres Algues, disponible chaque année à l'état vivant.

Différentes circonstances, toutefois, ont retardé jusqu'à ce jour la rédaction détaillée et la publication de mon travail. Entretemps, quelques autres observateurs ont porté leur attention sur cette plante remarquable. M. Heinricher, de Grätz, qui disposait de la végétation apparue près de cette localité, et qui avait eu connaissance de ma communication, rendit compte, quelques mois plus tard (le 23 octobre 1883), dans les *Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft*, T. I, p. 433—450, des résultats de son étude du *Sphaeroplea*, résultats qui à certains égards diffèrent des miens. D'autre part, M. Kny, dans la VIe section de ses excellentes *Wandtafeln*, a consacré trois planches au *Sphaeroplea annulina*, en utilisant, pour la description qui les accompagne, non seulement le travail classique de Cohn, mais aussi les résultats obtenus par M. Heinricher et par moi.

En outre, au cours de ces dernières années, les recherches de M. Strasburger et d'autres savants sur la segmentation des cellules et des noyaux et sur les modes d'épaississement des parois cellulaires, ainsi que les écrits de MM. Schmitz, Treub, Schimper etc. concernant les cellules multinucléées et les chromatophores, ont beaucoup ajouté à nos connaissances sur ces divers sujets.

Toutes ces circonstances m'ont engagé à répéter et à étendre, relativement aux points qui viennent d'être cités, mes observations sur le *Sphaeroplea annulina*, de sorte que je suis maintenant à même, mieux qu'en 1883, de faire connaître les particularités de cette Algue intéressante. Sur un seul point j'ai dû modifier mon opinion antérieure, étant parvenu à découvrir dans le *Sphaeroplea* de nombreux noyaux, qui avaient échappé à mes recherches précédentes; mais du reste j'ai vu se confirmer de plus en plus la conclusion déjà formulée dans ma communication préliminaire, à savoir, que la plante en question est un objet précieux pour l'étude de la formation de la paroi cellulaire et du rôle du protoplasma, ainsi que pour celle du développement et de la fonction des

oosphères et des spermatozoïdes. C'est ce que mettront en évidence, je l'espère, les détails dans lesquels je vais entrer.

Histoire biologique générale.

Quant à l'histoire biologique générale du *Sphaeroplea annulina* je puis être bref, les traits essentiels en ayant déjà été dévoilés, en 1855, par la belle étude de Cohn, dont les résultats ont trouvé une confirmation dans les recherches postérieures. [1])

Notre Algue, rapportée à une famille particulière (Sphaeropléacées) des Chlorophycées, ne se rencontre, comme il a été dit, que rarement, dans l'eau douce et de préférence dans des lieux exposés à des inondations temporaires. Elle se montre parfois subitement en grandes masses, pour ne plus reparaître ensuite pendant de longues années.

Dans cet état végétatif, elle constitue de longs filaments simples, flottant dans l'eau à la manière des *Spirogyra*, *Oscillaria* etc., et qui, lorsqu'ils ne sont pas rompus, ont les deux extrémités semblables entre elles, atténuées en pointe et terminées par un long appendice flagelliforme. Des cloisons transversales, perpendiculaires à l'axe longitudinal de la plante, et placées à des intervalles très inégaux, divisent le filament en un certain nombre de longues cellules cylindriques, dont la longueur par rapport à la largeur varie beaucoup, mais est en général très-considérable. M. Kny, ayant mesuré quelques-unes de ces cellules, a trouvé qu'au milieu du filament le rapport en question est habituellement compris entre 35 : 1 et 25 : 1, mais qu'il peut parfois s'élever jusqu'à 47,2 : 1. J'ai même vu des cellules dont la longueur était à la largeur dans le rapport de 90 : 1. Quelquefois, pourtant,

---

[1]) Pour cette même raison, je ne donnerai ici que les figures ayant rapport à mes recherches personnelles. En ce qui concerne l'habitus du *Sphaeroplea annulina*, dans les différentes phases de son développement et de sa reproduction, je puis renvoyer le lecteur aux planches des ouvrages précités de Cohn, Heinricher et Kny.

on rencontre aussi des cellules dont la longueur ne dépasse que peu ou point le diamètre.

Au sujet de ces parois transversales, Cohn n'indique rien de particulier, ni dans sa description, ni dans les planches qui accompagnent son mémoire dans les *Ann des sc. nat.*; mais les matériaux provenant de Grätz, qui ont servi à mes expériences aussi bien qu'aux observations de M. Heinricher et de M. Kny, montrent les parois transversales sous la forme d'épaisses poutres ou de tampons aux configurations les plus diverses, sur lesquels nous reviendrons plus loin. Cette circonstance a conduit M. Heinricher à regarder la plante, objet de son examen, comme une variété du *Sphaeroplea annulina* Ag., variété qu'il a baptisée du nom de *var. crassisepta* Heinr., et pour laquelle il a ajouté à la description systématique de Rabenhorst (*Flora Europaea Algarum*, Sect. III, Lipsiae 1868, p. 318) la diagnose suivante: *Septis crassis, quorum in medio crebro coni vel colliculi prominent; saepius et aliis locis in cellula annuli, aut coni, aut striae cellulosae materiae excrescunt. Fila facile articulatim dilabuntur, quo modo egregia vegetativa propagatio evenit* (Heinricher. *l. c.* p. 450). M. Kny, allant encore plus loin, tient notre *Sphaeroplea* pour spécifiquement différent de celui étudié par Cohn, tant à cause de la particularité mentionnée ci-dessus, que parce que la forme et l'arrangement des grains de chlorophylle seraient autres que ceux décrits par Cohn, et parce que dans la plante de celui-ci les parois cellulaires des filaments sporogènes seraient modifiées chimiquement et se coloreraient en rouge purpurin ou en violet sous l'action de l'iode seul. Quant à cette dernière différence, qui n'a pas échappé non plus à M. Heinricher, celui-ci fait toutefois la remarque, assez plausible, que Cohn avait peut-être employé une vieille solution d'iode, dans laquelle il s'était formé de l'acide iodhydrique, lequel, comme on sait, agit sur les parois cellulaires à la façon de l'iode et de l'acide sulfurique associés.

Quoi qu'il en soit, c'est un fait que tous les exemplaires

provenant de Grätz présentent des parois transversales fortement épaissies, affectant toutes sortes de formes irrégulières, et que ce caractère est héréditaire, puisque, dans la postérité issue des spores ou zygotes de ces plantes, il a été retrouvé sans le moindre affaiblissement, tant par MM. Heinricher et Kny que par moi-même.

Dans l'état végétatif, le contenu des cellules a un aspect très caractéristique, par suite de la distribution régulière du protoplasma, des chromatophores et des vacuoles, qui justifie parfaitement le nom spécifique „*annulina*", lorsque la plante est examinée à un grossissement médiocre. En effet, les grains de chlorophylle se voient alors confinés dans 40 à 70 anneaux (suivant la longueur de la cellule) étendus perpendiculairement à l'axe longitudinal, lesquels anneaux protoplasmiques sont séparés par de grandes vacuoles, qui, à l'exception d'un mince revêtement pariétal et de quelques fils déliés et incolores de protoplasma, occupent tout l'espace compris entre les anneaux successifs.

En examinant toutefois ces anneaux de plus près, on y reconnaît, ainsi que le remarque avec raison M. Kny (*l. c.*, p. 260), au lieu d'un ruban chlorophyllien homogène, une structure très-compliquée A l'endroit où les anneaux ou diaphragmes de protoplasma joignent la paroi, on voit des cordons plasmatiques plus denses, tantôt minces, tantôt plus épais, se rattacher obliquement au revêtement pariétal. Dans ces cordons on trouve un grand nombre de granules de chlorophylle, et en outre dans chaque anneau un, deux ou trois chromatophores plus gros, qui, lorsque le filament est à l'état frais, sont également colorés en vert. Quand les filaments ont été décolorés et fixés par l'acide chromique (à 1%), on constate que les chromatophores consistent en un corps intérieur globuleux, ou pyrénoïde, entouré d'un anneau amylacé, ordinairement d'apparence continue, mais se présentant dans les cas favorables, et sous un grossissement suffisant, comme une couronne de petits grains; cet anneau amylacé est lui-

même enveloppé d'une couche de protoplasma, dans laquelle était concentrée la matière colorante. Le traitement par l'iodure de glycérine, appliqué aux filaments fixés, fait bien ressortir ces détails de structure; les trois parties composantes des chromatophores deviennent également visibles sous l'action de la cochenille alunée et de l'hématoxyline, le pyrénoïde et l'anneau plasmatique extérieur absorbant alors la matière colorante, tandis que l'anneau amylacé reste incolore.

Les chromatophores paraissent pouvoir grandir et se multiplier par voie de segmentation. A l'origine, le diaphragme n'en contient qu'un seul, plus tard on en trouve deux et parfois trois, plus petits, qui, d'abord rapprochés l'un de l'autre, s'écartent ensuite et augmentent de volume. Mais quant à la segmentation elle-même, je ne l'ai pas observée. J'ai seulement vu, dans quelques rares cas, un pyrénoïde allongé et étranglé au milieu, avec un groupement, autre que leur groupement ordinaire, des particules qui absorbent plus ou moins la matière colorante; c'est là un phénomène qui se rapproche de ce que M. Schmitz (*Die Chromatophoren der Algen*, p. 91 et suiv.) a fait connaître au sujet de la segmentation des pyrénoïdes de Thallophytes.

Dans les cellules on rencontre en outre une quantité de petits noyaux, dont il sera parlé plus loin.

Au bout de quelques semaines (un peu plus tôt ou plus tard, suivant le degré de lumière et de température), alors que va commencer la *fructification*, le contenu des cellules végétatives éprouve des changements considérables. Généralement, quelques-unes des longues cellules d'un filament de *Sphaeroplea* deviennent des anthéridies, d'autres des oogones; le nombre de ces anthéridies et de ces oogones dépend de la croissance plus ou moins luxuriante de l'Algue. En cas de circonstances défavorables, par exemple lors de la culture dans des vases trop étroits, il peut arriver qu'une plante ne contienne qu'une seule anthéridie et un seul oogone, et j'ai même rencontré parfois de petites plantes qui ne consistaient

qu'en une couple de cellules et ne possédaient qu'un seul des deux organes sexuels; chez ces Algues, de même que dans d'autres divisions du règne végétal, l'appauvrissement peut donc non seulement conduire à des formations naines, mais aussi donner lieu à la diœcie. La même observation a été faite par M. Heinricher *l. c.*, p. 441.

Les *anthéridies* renferment une multitude de spermatozoïdes, qui sont formés aux dépens du protoplasma, après que les chromatophores ont successivement disparu et que le tout a pris une teinte rouge brunâtre claire. Les grandes vacuoles persistent encore dans cette nouvelle phase, mais elles deviennent de plus en plus petites, successivement dans les différentes parties de la cellule, et entretemps un mouvement vibratoire leur est imprimé par l'agitation des spermatozoïdes. Finalement, la cellule entière est presque exclusivement remplie de spermatozoïdes en mouvement, qui peu à peu s'en échappent par quelques petites ouvertures formées dans la paroi cylindrique de la cellule, pour aller à la recherche des oogones et, à travers les ouvertures toutes semblables de la paroi de ces dernières, atteindre les oosphères.

Dans les cellules qui se transforment en *oogones*, on voit aussi s'altérer graduellement la disposition régulière du protoplasma à chromatophores et des vacuoles. D'abord, les anneaux deviennent moins distincts, et les chromatophores à noyaux amylacés, ainsi que les grains de chlorophylle, paraissent plutôt unis les uns aux autres par un réseau de fils plasmatiques incolores. Dans d'autres cas, lorsque les grandes vacuoles se sont divisées en une quantité de petites, le tout peut présenter l'aspect d'une écume verte et blanche. Bientôt, toutefois, les chromatophores se réunissent, avec des grains de chlorophylle et du plasma, en amas vert sombre, denses, irrégulièrement stelliformes, que des fils plasmatiques minces et incolores relient en tous sens à la paroi de la cellule; entre ces amas se voient, diamétralement étendues dans le contenu cellulaire, des membranes incolores excessivement

minces, qu'à première vue on prendrait pour de jeunes cloisons transversales, mais qui bientôt, la contraction du plasma faisant des progrès, disparaissent et sont alors reconnues pour n'avoir été que les parois de vacuoles. Les masses irrégulières se contractent de plus en plus, résorbent les fils dirigés au dehors, et s'arrondissent en corps ellipsoïdaux ou globuleux, composés en partie de plasma vert, en partie de plasma incolore et limpide. Finalement, elles deviennent des boules vertes, qui tantôt sont contiguës et disposées en série régulière, tantôt, lorsque leur diamètre est notablement inférieur à celui de la cavité cellulaire, alternent entre elles ou sont placées en une rangée double; dans ce dernier cas, elles n'occupent pas toute la longueur de la cellule. C'est à ces boules, qui ne sont autre chose que des oosphères, que le *Sphaeroplea* doit son nom générique. Déjà, selon toute apparence, avant que ce changement n'ait eu lieu, et alors que le protoplasma était encore appliqué à la paroi cellulaire, de petites ouvertures se sont produites dans celle-ci, tout comme dans la paroi des anthéridies. Par ces ouvertures pénètrent plus tard, lorsque les oosphères sont formées, les spermatozoïdes, qui alors s'agitent autour des ovules, s'appliquent à leur surface et finissent par s'unir avec eux. Bien que les pertuis soient à peine assez larges pour laisser passer un seul spermatozoïde, on voit bientôt une quantité de ces corps reproducteurs se mouvoir entre les oosphères. Quant aux détails de ce remarquable phénomène, déjà décrit par Cohn, mes observations sont entièrement d'accord avec les siennes. En le voyant s'accomplir, on reste stupéfait de la précision avec laquelle, en peu de temps, les petits organismes parviennent à trouver leur chemin, et involontairement l'idée d'un pouvoir percepteur se présente à l'esprit, ainsi que j'en ai déjà fait la remarque dans ma communication de 1883. Evidemment il doit intervenir ici, — comme M. Pfeffer, dans ses intéressantes recherches de l'année passée, l'a trouvé pour les spermatozoïdes des Fougères et des Mousses, — un stimulant, probablement de nature

chimique. Mais on ignore absolument si ce stimulant est, ici encore, de l'acide malique, ou bien quelque autre substance.

En suite de la fécondation, les oosphères s'entourent d'une paroi mince, lisse, hyaline, qui toutefois s'en détache bientôt et flotte alors comme un sac vide autour des spores; préalablement, à l'intérieur de cette première paroi, il s'en est formé une seconde, plus épaisse, pourvue d'une multitude de pointes saillantes et fortement cuticularisée; à celle-ci s'ajoute finalement encore une mince membrane, qui la tapisse en-dedans. Le contenu des spores, primitivement vert, passe peu à peu au rouge de minium et devient opaque. Il renferme, outre la matière colorante, des gouttes d'huile et 2 ou 4 pyrénoïdes, entourés chacun d'un grand anneau amylacé et de quelques petits grains d'amidon au milieu du plasma. A cet état, et toujours incluses dans la cellule vide de l'oogone, les oospores ou zygotes passent l'hiver, pour germer quand les circonstances seront devenues favorables; elles se transforment alors en 3 ou 4 zoospores, qui s'échappent du tégument fendu de l'oospore, errent d'abord librement sous la forme de corpuscules ellipsoïdes munis d'une couple de cils, puis prennent bientôt la forme d'un fuseau, redeviennent peu à peu de couleur verte et se changent, par accroissement, en filaments végétatifs de *Sphaeroplea.*

Voila, en abrégé, l'histoire biologique de cette intéressante Algue, telle qu'elle résulte du travail très exact de M. Cohn et des recherches postérieures de M. Heinricher, de M. Kny et de moi-même.

Je vais maintenant étudier plus en détail quelques phénomènes de la vie du *Sphaeroplea*, qui n'ont pas été suffisamment élucidés par mes devanciers, ou au sujet desquels je suis arrivé à des résultats différents des leurs; je m'attacherai surtout aux phénomènes pouvant aussi jeter quelque jour sur les actes vitaux d'autres plantes.

Structure des Oospores ou Zygotes.

Les oospores mûres, qui restent alignées en rangée simple ou double dans la cellule-mère ou l'oogone et y passent l'hiver (elles ne deviennent ordinairement libres qu'à la suite de la lente désorganisation de cette cellule-mère), sont des corps sphériques, ayant en moyenne un diamètre de $0^{mm},02$. Leur grosseur peut toutefois varier assez notablement. Lorsqu'elles sont disposées dans la cellule en une rangée unique, elles sont généralement plus grosses que là où l'on trouve juxtaposées deux, ou parfois (quoique rarement) trois de ces séries. Suivant M. Cohn, elles peuvent atteindre un diamètre de $0^{mm},054$, et il en a même rencontré de $0^{mm},181$, qualifiées par lui de *spores monstrueuses*.

Elles sont revêtues d'une paroi assez épaisse, pourvue d'épaississements en forme de verrues, qui présentent de une à deux fois l'épaisseur de la paroi, se terminent en pointe légèrement obtuse et sont ordinairement très rapprochés l'un de l'autre, de sorte que, sur la coupe, l'oosphère ressemble à une roue grossièrement dentée. M. Cohn a donné (p. 189) une description très détaillée de cette paroi, description qui s'accorde en général avec mes propres observations, sauf que je n'ai pu remarquer que les protubérances verruciformes fussent disposées en spirales régulières, convergeant vers les deux pôles, comme les cercles méridiens d'une sphère. Elles me paraissent bien distribuées uniformément sur les différents côtés, mais sans la régularité particulière que M. Cohn a observée chez quelques grands individus.

La nature de cette paroi, l'exospore ou l'exine (pour user de la terminologie de M. Strasburger, qui a parallélisé les parois des spores et celles des grains de pollen), est différente de celle des parois cellulosiques; la paroi de l'oosphère est fortement cuticularisée; elle ne se colore pas en bleu, et le plus souvent ne se colore pas du tout, sous l'influence du chloro-iodure de zinc; elle n'éprouve aucun changement ex-

térieur par l'ébullition dans l'eau, et résiste même à l'action de la potasse. Par contre, la membrane lisse, extrêmement mince, parfois difficile à voir, qui forme la paroi interne de la spore, est composée de cellulose pure.

Le contenu des oospores consiste en une masse opaque, rouge de cinabre, dans laquelle on observe, au milieu d'un plasma finement grenu, un plus ou moins grand nombre de globules ayant tout l'aspect de gouttes oléagineuses, mais qui ne paraissent pourtant pas composées d'huile grasse, puisque, d'après M. Heinricher (*l. c.*, p. 444), un mois de séjour dans l'éther ne les fait pas disparaître. On ne peut guère admettre, en effet, que durant tout ce temps l'éther n'aurait pas traversé la paroi. La vraie nature de ces corpuscules globuleux, qu'on rencontre en diverses modifications dans les spores d'une foule de Cryptogames, n'est pas encore entièrement élucidée. Entre lès matières qui viennent d'être citées, on trouve, en outre, un nombre variable de très petits grains de fécule, qui ne se laissent reconnaître comme tels qu'à l'aide de l'iode.

Enfin, dans les spores jeunes, qui ne sont pas encore revêtues de l'exine, M. Heinricher a observé un noyau, mais il n'a pu décider si ce noyau existe aussi dans les zygotes adultes (*l. c.*, p. 438). Plus loin, nous reviendrons sur cette question.

Faculté germinative.

Il paraît être de règle chez le *Sphaeroplea*, comme chez beaucoup d'autres Algues, tant Oosporées que Zygosporées, que les zygotes, formées en été, passent l'hiver dans la cellule où elles sont nées, pour germer au printemps suivant, ou plus tard, quand les conditions biologiques sont favorables; préalablement, ou bien simultanément, les parois de la cellule-mère, qui a cessé de vivre, sont peu à peu désorganisées et

dissoutes, ce qui met en liberté les zygotes ou les zoospores déjà formées. De la circonstance que le *Sphaeroplea*, ainsi qu'il a été dit plus haut (p. 93), se montre tout à coup en abondance, dans des localités où durant une longue suite d'années on n'en avait observé aucune trace, on doit inférer que la faculté germinative est susceptible de se conserver longtemps. Qu'elle peut persister plus d'*une* année, lorsque les zygotes sont conservées à l'état sec, c'est ce que confirment mes observations. Les spores recueillies à Grätz pendant l'été de 1882, et que je reçus sèches en mars 1883, germèrent non seulement cette année-là, mais aussi, très bien et en peu de temps, l'année suivante. Les choses se passèrent de la même manière en 1886, et même aujourd'hui (janv. 1887) j'ai encore des plantes vivantes de *Sphaeroplea* provenant du reste de la récolte de 1882, que j'avais mis à germer, il y a quelques semaines, dans une serre chaude. Il n'y a pas à nier, toutefois, que ce dernier semis n'ait levé plus tardivement que les autres, et qu'un nombre relativement plus grand de zygotes n'aient refusé de germer.

M. Cohn, qui lui aussi avait déjà reconnu par expérience que des zygotes conservées tout l'hiver à l'état sec dans son herbier germaient bien au printemps, croyait que ce repos hibernal était nécessaire pour le développement de la plante; cette opinion se fondait sur ce que les spores ne donnaient aucun signe de végétation avant le retour de la belle saison, même lorsque, immergées dans l'eau et placées dans une chambre, elles avaient été soumises pendant tout l'hiver à un degré de chaleur au moins aussi élevé que la température printanière régnant lors de la germination. M. Cohn parlait à ce propos d'une influence mystérieuse du printemps, influence qu'il ne se hasardait du reste pas à expliquer. Je doute qu'aujourd'hui, après 30 ans révolus, le savant auteur soit encore attaché à cette idée. Le temps n'est plus où, en présence de semblables phénomènes, on invoquait une action mystérieuse. Sans doute, — l'expérience universelle nous l'apprend, — beaucoup de

spores et de graines ont besoin d'un temps de repos plus ou moins long, avant de pouvoir germer. Dans la zone tempérée, ce développement initial ne s'opère ordinairement qu'au printemps qui suit la maturation et la dissémination de ces corps reproducteurs. Mais, bien loin de résider exclusivement dans la basse température de l'hiver, la raison en doit être cherchée plutôt dans les changements que la graine et la spore doivent encore subir après qu'elles se sont séparées de la plante mère, ou après que celle-ci est morte. Quoique, dans la plupart des cas, ces modifications ne soient encore que peu ou point connues, les recherches des dernières années ont pourtant déjà mis sur la voie de quelques processus qui y jouent indubitablement un grand rôle. M. H. Müller-Thurgau, par exemple, a étudié, l'année dernière, les transformations matérielles qui se produisent dans la pomme de terre durant la période de repos (*Landwirthsch. Jahrbücher*, 1885, p. 851—907; anal. dans *Bot. Centralbl.*, T. XXVII, p. 90—92); il a montré qu'au début les bourgeons manquent de la quantité nécessaire de sucre, parce que le sucre formé est employé en grande partie à la production de fécule et pour une faible part à la respiration; ce n'est que plus tard, à la fin de la période de repos, lorsque l'activité du protoplasma se ralentit, que le sucre peut s'accumuler en quantité suffisante au voisinage des bourgeons, et qu'en même temps un ferment propre apparaît dans le germe. C'est ainsi que beaucoup de plantes possèdent durant l'hiver une période de repos réelle, qui dépend de causes internes et doit être soigneusement distinguée de la période de repos apparente, occasionnée par la sécheresse ou par l'abaissement de la température, c'est-à-dire, par des influences extérieures.

Pour en revenir au *Sphaeroplea*, j'ai trouvé, de même que M. Cohn, que les oospores formées au commencement de l'été et conservées depuis lors dans l'eau, jusqu'à la fin de l'hiver, n'éprouvaient pas de modification, bien que, durant la mauvaise saison, elles eussent été placées dans une chambre

chauffée. Mais il ne s'ensuit pas que ces spores ne puissent germer en hiver. Au contraire, les zygotes des récoltes de 1882 et de 1883 (les unes et les autres reçues de Grätz, par l'obligeante entremise de M. le professeur Leitgeb), ainsi que celles de plantes cultivées ici à Utrecht en 1883, ces zygotes, dis-je, mises le 13 décembre 1883 dans des vases de verre avec de l'eau de puits, et installées à une place bien éclairée dans une serre d'élevage dont la température moyenne était de 15 à 18° C., montrèrent, dès le 24 décembre, une quantité de jeunes plantules. Tout en admettant que les spores de *Sphaeroplea* ont besoin, elles aussi, d'une période de repos, je crois donc que la non-réussite des essais de germination faits en hiver, dans une chambre, doit le plus souvent être attribuée au trop grand abaissement de la température pendant la nuit.

Après quelques tentatives malheureuses, j'ai encore pu observer le début de la germination des zygotes, en hiver, au sein d'une goutte d'eau suspendue, suivant le précepte de M. Strasburger (voir Behrens, *Hilfsbuch f. mikr. Unters.*, p. 203), dans une chambre humide, qui elle-même était placée dans une serre chaude. Le développement, toutefois, s'arrêta bientôt, les jeunes plantules ayant été tuées par la multiplication rapide de bactéries et de champignons inférieurs.

M. Heinricher a fait voir (*l. c.*, p. 143) que les spores du *Sphaeroplea* peuvent aussi germer normalement à l'obscurité, et même former dans ces conditions de la chlorophylle (vraisemblablement par une transformation de la matière oléagineuse rouge, l'hématochrome, transformation qui n'exigerait pas l'impulsion de la lumière). Au reste, ce ne sont que les premiers phénomènes de la germination (la formation de zoospores) qui s'accomplissent dans l'obscurité ; l'accroissement cesse bientôt par défaut d'assimilation, lorsque la réserve de matières plastiques est épuisée.

Phénomènes de la germination.

Quand la vie s'éveille dans les oospores, le premier phénomène qu'on observe est une modification de leur contenu. Les grains rouges paraissent se diviser en une quantité de plus petits, et entre ceux-ci il se forme graduellement un plus ou moins grand nombre de petits granules verts, surtout à la périphérie de la masse sphérique. Peu à peu le contenu se divise en deux à quatre portions, mais souvent cette division est très-difficile à observer, parce que le contenu opaque remplit entièrement la spore et qu'à l'origine les portions ne sont pas encore entourées d'une paroi propre. A vrai dire, ces portions ne se voient bien que lorsque, s'arrondissant, elles commencent l'une après l'autre à se mouvoir dans la spore. Vers le même temps, une petite ouverture s'est formée dans la paroi épaissie de la spore, d'une manière que je n'ai pu saisir exactement. A travers cette ouverture, une des portions précitées, maintenant devenue zoospore, se dégage lentement et avec peine; durant ce travail, elle change notablement de forme, passant de la forme ellipsoïdale à la forme vermiculaire, et en même temps elle exécute un mouvement propre, mouvement de forage et de rotation autour de son axe, qui s'opère tantôt dans un sens tantôt dans l'autre, parfois avec chocs, et dont le résultat est de pousser en dehors de la zygote la partie épaisse, dite postérieure, de la zoospore, après quoi le reste suit de lui-même. Dans cet état, en effet, la zoospore qui s'échappe est un corpuscule vermiforme, deux à trois fois plus long que large, dont l'une des extrémités (la partie postérieure) est plus épaisse et verte, tandis que l'autre moitié, ou la partie dite antérieure, est notablement plus mince et remplie de très petits granules rouges, sauf au sommet, qui est incolore et où paraissent se trouver deux cils, non visibles durant la vie, mais se laissant distinguer avec beaucoup de peine lorsque la zoospore a été tuée par l'iode (Heinricher, *l.c.*, p. 445, note, et fig. 17; voir aussi la belle figure 4 de la Pl. LXV des *Wandtafeln* de Kny).

M. Heinricher pense, contrairement à M. Cohn, que cette distribution des matières colorantes rouge et verte dans les zoospores est toujours très régulière ; mais, quant à moi, outre les zoospores colorées comme il a été dit plus haut, j'en ai fréquemment trouvé aussi dans lesquelles les grains rouges et verts étaient mêlés sans aucun ordre ; j'ai même encore observé cette irrégularité dans une phase ultérieure, alors que les spores s'étaient déjà développées en petites Algues fusiformes à extrémités flagelliformes. (comp. Kny, *l.c.*, p. 264).

Après que, de la manière ci-dessus exposée, une des portions de l'oospore s'est changée en zoospore et a pris son essor, une seconde s'échappe de la même façon, puis une troisième et parfois une quatrième, jusqu'à ce que finalement il ne reste plus que la paroi de la zygote, sous la forme d'une coque vide. M. Heinricher décrit ce phénomène en détail (*l.c.*, p. 445—447), et ce que j'en ai vu s'accorde en général avec cette description, de sorte que je puis y renvoyer. Les zoospores mises en liberté se meuvent, l'extrémité amincie en avant, en tournoyant dans l'eau ; mais bientôt elles prennent la forme d'un petit fuseau atténué aux deux extrémités en un mince filament flagelliforme, c'est-à-dire la forme typique du *Sphaeroplea*, ce qui marque la fin de la germination.

J'ai supposé jusqu'ici que la zygote était devenue libre, par la destruction préalable de la paroi de l'oogone ; fréquemment, toutefois, les zygotes restent incluses par séries entières dans la cellule-mère, même au printemps. Dans ce cas, la germination s'effectue à l'intérieur de la cellule-mère, mais les zoospores qui se forment rencontrent alors des conditions très défavorables. C'est à peine si l'espace est suffisant pour leur permettre de sortir de la spore et de trouver une petite place modeste entre les zygotes et la paroi interne de l'oogone. Pour y parvenir, elles doivent souvent se contourner fortement et prendre toutes sortes de formes bizarres, comme le montre la fig. 20, pl. IV. Quant au développement ultérieur, les circonstances ne s'y prêtent pas. Aussi n'y a-t-il pas lieu de

s'étonner que la plupart des zygotes encore renfermées dans la cellule-mère périssent, et que, pour les cultures artificielles, il soit avantageux de commencer par couper en petits fragments les cellules remplies de séries de zygotes; cette pratique, recommandée par M. Heinricher, donne des résultats favorables, ainsi que je m'en suis assuré par expérience.

Accroissement des jeunes filaments de Sphaeroplea.

Quand les zoospores sont devenues libres, elles se changent promptement, comme il a été dit, en petits corps fusiformes, qui à partir du milieu s'atténuent vers les deux extrémités, semblablement conformées, et s'y terminent en un long et mince fil flagelliforme, relativement assez raide et dépourvu de mouvement ciliaire. Pas plus que mes devanciers je n'ai pu observer le passage des zoospores à ce nouvel état, ni par conséquent le début de la formation de la paroi cellulosique; dans ce stade, en effet, les jeunes plantules de *Sphaeroplea* possèdent déjà une paroi de cellulose bien distincte, qui est surtout assez épaisse aux extrémités, de sorte que le lumen des appendices flagelliformes est réduit à un étroit canal et peut même disparaître complètement, cas où les extrémités consistent en une masse cellulosique pleine. Ces jeunes Algues sont, à l'origine, de quatre à six fois plus longues que larges, les extrémités y comprises; mais, tandis que la largeur ou épaisseur n'augmente que peu, les plantules s'allongent tellement, par accroissement intercalaire, que bientôt leur longueur surpasse de 20 à 30 fois leur largeur. Même alors, toutefois, elles sont encore unicellulaires. Ce n'est que plus tard qu'apparaissent, dans le long et mince filament, des cloisons transversales; de celles-ci, nous parlerons en détail plus loin.

Importantes aussi sont les modifications subies par le *contenu* cellulaire, après que les zoospores se sont transformées en

cellules fusiformes. Chez quelques-unes de ces dernières, les petits grains verts et rouges, qui dans la zoospore étaient ou bien mêlés les uns aux autres ou bien partagés entre les deux extrémités, persistent encore quelque temps, surtout dans le premier de ces deux cas. Ils remplissent alors la cavité de la cellule, à l'exception des extrémités. Le plus souvent, toutefois, les granules rouges ont disparu entièrement, ou peu s'en faut. Au lieu de ces granules on trouve, à l'équateur de la jeune plante fusiforme, une étroite bande verte, composée de très petits grains de chlorophylle et d'un chromatophore volumineux mêlés d'un peu de plasma incolore, laquelle bande se rattache à la mince couche du protoplasma pariétal et sépare deux grandes vacuoles sphériques.

A ce stade de jeunesse en succède bientôt un autre, dans lequel la cellule présente deux bandes ou anneaux de la même composition que la bande unique dont il vient d'être question; ces deux bandes se trouvent de part et d'autre de l'équateur, à des latitudes égales, et forment la séparation de trois vacuoles.

La jeune Algue croît alors vigoureusement en tout sens. L'ensemble est devenu plus grand, les deux bandes ou anneaux existent encore, mais elles sont plus larges, et chacune d'elles contient maintenant deux chromatophores. Vers le bas commence à se former un troisième anneau, qui ne tardera pas à égaler en dimension les deux autres et à être suivi d'un quatrième. Ainsi se constitue peu à peu une plante unicellulaire, 30 à 40 fois plus longue que large, terminée des deux côtés en une pointe droite ou faiblement arquée, et dont le contenu est formé d'une longue série de vacuoles à peu près également volumineuses, séparées par des bandes ou diaphragmes relativement minces de protoplasma (les soi-disant anneaux); ces diaphragmes, rattachés par de gros fils plasmatiques au plasma presque transparent qui revêt la paroi, comprennent dans leur composition, outre du plasma incolore, de petits grains de chlorophylle et des noyaux, un à trois

chromatophores, ainsi qu'il a déjà été dit p. 97. C'est là la forme ordinaire, typique, du *Sphaeroplea annulina*, telle qu'on la trouve partout décrite et figurée.

De même que M. Schmitz (*Die Chromatophoren der Algen*, p. 90 et suiv.), j'ai observé que les chromatophores se multiplient par étranglement. Déjà dans les plantes fraîches, on ne voit ordinairement, à l'origine, qu'un seul chromatophore dans chaque anneau, au milieu d'une quantité de fils plasmatiques reliés à la périphérie, qui en outre contiennent un plus ou moins grand nombre de granules de chlorophylle. Ensuite, on trouve deux chromatophores rapprochés ou juxtaposés, qui plus tard s'écartent l'un de l'autre. Parfois aussi, il existe trois de ces chromatophores dans un même anneau. Mais lorsque, suivant le précepte de M. Strasburger, les plantes vivantes ont été placées pendant environ 4 heures dans de l'acide chromique pur à 1 % (ou dans une solution saturée de bichromate de potasse, dont l'effet est le même), puis lavées à différentes reprises dans l'eau distillée, jusqu'à ce que le liquide ne montre plus trace de coloration, on obtient des préparations qui, à un grossissement suffisant, laissent bien reconnaître les détails des chromatophores. On constate alors, dans les cas favorables, que chez quelques-uns de ces chromatophores le pyrénoïde se présente sous la forme dite en biscuit, et que l'anneau amylacé, ainsi que la couche externe plasmatique, forment autour de lui une enveloppe inégalement épaisse. Bien que n'ayant pu suivre dans la plante vivante le processus de la segmentation (ce qui du reste eût été difficile, vu l'opacité des chromatophores), je crois donc pouvoir conclure, des images offertes par les filaments fixés au moyen des réactifs, que la division des chromatophores s'effectue par étranglement, à peu près de la même manière que celle des grains de chlorophylle.

Parois transversales.

Lorsque le filament unicellulaire du *Sphaeroplea* a atteint une certaine longueur, il s'y forme, un peu plus tôt ou un peu plus tard, perpendiculairement à l'axe longitudinal de la plante, une paroi transversale, qui ensuite est suivie de plusieurs autres. Cette première paroi transversale naît d'ordinaire au milieu de la cellule, mais elle peut se produire aussi à $\frac{1}{3}$ de la longueur. Sa place n'est donc pas constante, pas plus que celle de la paroi transversale suivante, qui apparaît assez souvent dans la plus petite des deux cellules-filles.

En général, les parois transversales se forment plus tard chez les plantes à végétation luxuriante que chez les plantes appauvries. Dans le premier cas, l'Algue peut avoir une longueur de $3^{mm},5$ avant l'apparition de la première cloison; chez les plantes faibles, au contraire, on trouve très vite une quantité de parois transversales. M. Heinricher, dans sa figure schématique n° 15, a représenté d'une manière simple, par des lignes et des points, plusieurs cas différents. J'en ai observé d'analogues dans les produits de mes cultures.

Ces parois transversales, ou cloisons, ont une forme très caractéristique, que M. Cohn, en 1855, paraît n'avoir pas connue, et qui a engagé M. Heinricher, comme je l'ai dit plus haut, à rapporter les plantes provenant de Grätz à une variété particulière de l'espèce *Sphaeroplea annulina* Ag. Au sujet de ces parois transversales, j'entrerai dans quelques détails.

Tout d'abord, on est frappé de leur grande épaisseur, qui dépasse considérablement, souvent 12 fois et même davantage, l'épaisseur des parois latérales de la cellule. De plus, leur surface n'est pas plane, comme d'ordinaire, mais irrégulièrement ondulée, ce qui est cause que la masse très réfringente de la cloison, vue de côté aussi bien que vue d'en haut, présente des parties d'un vif éclat propre, alternant

avec des parties rendues obscures par les ombres portées. Dans cette masse on distingue en outre, d'une manière plus ou moins nette, un grand nombre de couches parallèles. Vues en coupe, les cloisons peuvent offrir des figures très variées. On pourrait les partager en deux espèces, les cloisons *régulières* et les cloisons *irrégulières*, qui passent les unes aux autres par toutes sortes de formes intermédiaires. Aux premières j'ai appliqué, dans ma communication préliminaire à l'Académie des sciences d'Amsterdam, le nom de *poutres*. Elles ressemblent, dans leur forme la plus simple, telle que la montre la fig. 14*a*, Pl. IV, à une poutre transversale légèrement ondulée à la surface. Dans ce cas, toute communication entre les contenus des deux cellules adjacentes est interceptée par la poutre. Mais très souvent cette communication persiste encore pendant quelque temps, parce que la cloison est formée d'un épais et large anneau, laissant au centre une ouverture plus ou moins irrégulière, qui n'est fermée que plus tard, d'un seul côté ou des deux côtés à la fois, par un bouchon ou tampon de cellulose. Ce tampon se présente tantôt comme un épaississement de la poutre en son milieu, tantôt comme une masse plus ou moins conique reposant par une large base sur l'anneau. Plus tard, anneau et tampon sont intimement unis, et, étant d'ailleurs composés des mêmes substances, — du moins je n'ai pu y constater aucune différence physique ou chimique (voir à la page 115), — ils ne se distinguent que par l'allure différente des couches dans l'un et dans l'autre. Les fig. 14*b* et 14*c* en donneront une meilleure idée que ne pourrait le faire la description la plus minutieuse.

Le fait que l'anneau, quoique déjà assez épais et composé d'un certain nombre de couches, est encore ouvert au centre, se reconnaît le mieux lorsque, par suite d'une incurvation ou d'un repli du filament de *Sphaeroplea*, la paroi transversale se présente à l'œil, non pas de côté, mais de face. Toufois, alors même que l'anneau se voyait de côté ou de profil, j'ai plus d'une fois, sur la plante vivante, observé distincte-

ment l'ouverture centrale, et vu passer à travers cette ouverture, sans interruption, d'une cellule à l'autre, les fils plasmatiques chargés de granules de chlorophylle. Enfin, le fait a encore été confirmé à l'occasion de l'examen des zygotes reçues de Grätz Dans ces matériaux, j'ai en effet trouvé, outre les oospores et de petits bouts de filaments de *Sphaeroplea*, une multitude de petits disques ronds à surface un peu irrégulière, quelques-uns pleins, mais d'autres percés au milieu d'une ouverture irrégulière, et parfaitement semblables à l'image qu'offraient les parois transversales de l'Algue vivante, vues d'en haut (voir Pl. IV, fig. 16). Or ces petits disques, comme le montrèrent surabondamment les réactions chimiques, n'étaient autre chose que les parois transversales ou poutres des filaments de *Sphaeroplea*, lesquelles, isolées par suite de la destruction de la paroi extérieure, laissaient maintenant observer nettement toutes leurs particularités; en même temps, ces petits disques fournissaient la preuve irréfragable du haut degré de résistance des parois transversales, restées intactes, même après la disparition totale de la paroi à laquelle elles avaient été unies.

Outre ces parois transversales, naissant à une distance plus ou moins grande les unes des autres, on trouve encore une seconde sorte de séparations, que j'ai qualifiées ci-dessus d'*irrégulières*. Celles-ci affectent les formes les plus capricieuses, et ne sont autre chose que des excroissances cellulosiques, qui peuvent se produire en tous les points des parois latérales et longitudinales, tantôt ne faisant que rétrécir localement la cavité de la cellule, tantôt formant des cloisons complètes, d'une énorme épaisseur. Il n'est guère possible de donner une description de ces excroissances, mais les fig. 17, 18, 19, 21 et 22 de la Pl. IV en donneront au moins une idée. Notons, qu'elles se rencontrent fréquemment en grande quantité dans les minces extrémités des filaments, et que parfois elles transforment ces extrémités, sur une certaine longueur, en une masse pleine et solide (voir fig. 22).

La *nature chimique* de toutes ces parois transversales et excroissances est la même. Toutes consistent, de même que les parois extérieures du *Sphaeroplea*, en cellulose; je n'ai pu y découvrir des couches d'autres substances. Par l'addition du chloro-iodure de zinc, toutes sont colorées en bleu, les parois transversales encore plus rapidement et en teinte plus foncée que les parois extérieures. Au bout de quelque temps, lorsque l'iode s'est en partie échappé, les unes et les autres deviennent violettes; les parois transversales et les excroissances, peut-être à cause de leur masse plus grande, possèdent encore cette teinte alors que les parois extérieures sont déjà décolorées. On y remarque en même temps, comme chez la vraie cellulose, un léger gonflement à la suite de l'action du réactif.

Bien que dissemblables au premier coup d'œil, les parois transversales régulières, ou poutres, et les excroissances irrégulières s'accordent pourtant, je crois, quant au *mode de naissance* et *d'accroissement*, et c'est ce qui explique les passages qu'on trouve entre les deux sortes de formes.

Tandis que, lors du développement des filaments du *Sphaeroplea*, les parois extérieures s'accroissent par interposition ou intussusception, les parois transversales naissent, de même que celles du *Spirogyra* et d'autres Algues, par l'apposition de couches de cellulose à la face interne de la paroi extérieure, et cela de telle sorte qu'il se forme d'abord un étroit anneau, perpendiculaire à la direction longitudinale du filament. Sur la coupe optique du filament, cet anneau apparaît sous la forme de deux petites protubérances, situées diamétralement vis-à-vis l'une de l'autre à la face interne de la paroi cellulaire (voir fig. 15). Dans la suite de leur développement, il peut arriver que ces protubérances, sans s'épaissir, forment un anneau de plus en plus large et finissent par se toucher; la cloison séparant les deux cellules ainsi créées est alors devenue complète, après quoi elle gagne en épaisseur par l'apposition de nouvelles couches de cellulose. D'autres

fois, de nouvelles couches se déposent sur toute la surface des protubérances, d'où il résulte un anneau parfois assez épais, mais ouvert au centre. C'est ce qui a eu lieu, entre autres, dans le cas représenté fig. 14*b*. Sur cet anneau se forment ensuite, par l'apposition de couches, soit d'un seul côté soit des deux côtés à la fois, les gros bouchons ou tampons de cellulose, qui rendent la séparation complète (voir fig. 14*c*).

A l'appui de ces vues, je citerai, d'une part, l'allure des couches qu'on observe sur les anneaux et sur les tampons (v. fig. 14*c*, 17, 18, 22), couches qui indiquent nettement la direction des dépôts successifs; d'autre part, les différences que présente, près de ces dépôts, la structure du contenu de la cellule. En effet, parfois au contact immédiat de ces dépôts, parfois à peu de distance, on voit, au lieu des anneaux plasmatiques ordinaires du *Sphaeroplea*, une dense accumulation de plasma incolore, de petits grains de chlorophylle et de chromatophores (jusqu'à 5 ou 6); cette masse, lorsqu'elle n'est pas directement appliquée contre le dépôt, s'y rattache par plusieurs minces fils plasmatiques incolores (voir fig. 19 et 25), et tout semble indiquer que la matière destinée aux dépôts est formée dans cette masse, puis conduite au lieu de destination par les filets plasmatiques.

Tous ces faits ressortent encore mieux, lorsque l'attention se porte aussi sur le mode de production des excroissances cellulosiques irrégulières. Celles-ci commencent ordinairement, de même que les anneaux, par un dépôt en l'un ou l'autre point de la face interne de la paroi cellulaire, et leur forme ressemble d'abord à celle des tampons qui bouchent les anneaux. On dirait des tampons qui, au lieu d'être attachés au bord d'un anneau, sont fixés sur un point quelconque de la paroi interne de la cellule. La fig. 19 en donne un exemple. Dans les minces extrémités de la plante on trouve fréquemment un certain nombre de ces tampons très-près les uns des autres, et dans la partie médiane, plus épaisse, il n'est pas rare non

plus qu'ils soient assez rapprochés. Sur ces premiers dépôts de cellulose il s'en opère de nouveaux, tantôt dans une direction, tantôt dans une autre, pendant que le protoplasma, avec ses attributs, s'accumule dans leur voisinage. De cette manière, lorsque quelques-uns de ces tampons se trouvent à peu de distance les uns des autres, tout en n'étant pas situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe de la plante, il peut se faire que, par leur accroissement successif, ils en viennent à se toucher et à se souder entre eux, de sorte qu'il se forme finalement une paroi ou poutre transversale plus ou moins irrégulière. Le résultat de ce processus est représenté dans la fig. 19 et, à un état plus avancé, dans la fig. 17; les excroissances sont faciles à reconnaître à leurs contours foncés, conséquence du grand pouvoir réfringent de la masse cellulosique.

Mais il peut arriver aussi, une fois que la tendance à l'accroissement exagéré de la cellulose existe dans le filament de *Sphaeroplea*, qu'entre deux parois ou poutres transversales rapprochées, et déjà assez épaisses, le dépôt de cellulose se continue d'une façon irrégulière. Dans ce cas, une certaine quantité de protoplasma et de chlorophylle est incluse entre les masses cellulosiques, où elle reste tant que dure la vie de la cellule. Les chromatophores, toutefois, ne se laissent pas distinctement reconnaître dans cette accumulation opaque de protoplasma vert, et la réaction de l'iode montre qu'ici, de même que dans les extrémités pointues dont la cavité est presque entièrement remplie par les dépôts de cellulose, il n'existe plus de fécule. La fécule a donc probablement servi à la formation de la cellulose. M. Heinricher, qui donne aussi une brève description des tampons cellulosiques, est arrivé au même résultat (*l. c.*, p. 435).

De ce qui précède, il ressort que, comme je l'ai déjà fait remarquer dans ma communication préliminaire (*Procesverbaal der Zitting van* 26 *Mei* 1883 *der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam*, et *Botan. Centralblatt*, T. XV, N° 12), la formation

des poutres transversales et des tampons de cellulose peut difficilement avoir lieu conformément aux vues de M. Naegeli, c'est-à-dire par intussusception, mais qu'il faut plutôt songer à l'accroissement par opposition, tel que l'ont décrit M. Dippel et M. Strasburger. De même que les poutres du *Caulerpa* ont servi à ces derniers physiologistes d'appui à leur opinion, de même celle-ci peut être étayée par les excroissances cellulosiques du *Sphaeroplea.* Quant à savoir jusqu'à quel point les phénomènes que présente le *Sphaeroplea* se laisseraient expliquer aussi par les idées que M. Wiesner a récemment développées, dans ses importantes *Untersuchungen über die Organisation der vegetabilischen Zellhaut* (*Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, janvier 1886), au sujet de la structure et de l'accroissement de la membrane cellulaire, c'est une question qui demanderait un examen spécial. Je noterai seulement que la conception de M. Wiesner, qui représente la paroi cellulaire en voie d'accroissement comme un tissu vivant à contenu protoplasmique, et qui fait ainsi disparaître la limite tranchée admise jusqu'ici entre le protoplasma et la paroi, que cette conception, dis-je, place dans un tout autre jour les excroissances cellulosiques ci-dessus décrites, où fréquemment une certaine quantité de protoplasma est englobée dans la masse de cellulose ; elle rend encore mieux compte de la vitalité persistante de ce protoplasma inclus que ne le fait l'opinion ancienne, suivant laquelle on devrait le regarder comme plus ou moins enkysté. Dans le cas du *Sphaeroplea*, en effet, on n'a pas affaire à des états de repos, tels que ceux trouvés par M. Stahl chez le *Vaucheria geminata* (*Bot. Zeit.*, 1879, N° 9), mais à des plantes en pleine croissance.

La formation des parois transversales en forme de poutres paraît être pour notre Algue un phénomène normal. Du moins, on les trouve régulièrement, dans des plantes à végétation vigoureuse et évidemment tout-à-fait bien portantes. M. Heinricher les considère comme l'un des caractères principaux de sa variété *crassisepta* (voir plus haut, p. 96). Ces poutres

sont, de plus, héréditaires. M. Leitgeb les vit pour la première fois en 1882; les plantes issues des zygotes de cette génération les montrèrent également, à Berlin, chez M. Kny, et à Utrecht, chez moi, aussi bien qu'à Grätz; je les retrouvai encore dans la troisième génération.

Les excroissances cellulosiques volumineuses paraissent toutefois apparaître de préférence dans des conditions particulières, légèrement anormales. Je les ai trouvées principalement chez des plantes pauvrement développées, surtout chez celles qui, placées dans des vases de petite capacité, devaient vivre dans une quantité d'eau relativement faible. Cela s'accorde avec les résultats obtenus par M. Heinricher, qui vit augmenter la tendance à former des tampons de cellulose lorsque les plantes étaient transportées, de leur station naturelle, dans un aquarium. Considéré d'un point de vue général, cet excès de production cellulosique, dans des conditions vitales défavorables, se rattache au fait bien connu de l'énorme épaississement que les parois cellulaires peuvent acquérir chez beaucoup de Phanérogames croissant sur un sol aride, stérile, qui ne leur permet qu'une vie languissante et souffreteuse. Rappelons, par exemple, les groupes de cellules à parois épaisses qu'on trouve dans les fruits rabougris et pierreux de certains pommiers et poiriers.

M. Heinricher, qui a observé le *Sphaeroplea* à l'état de nature, savoir dans le bassin d'une fontaine de Grätz, nous apprend que les cellules se rompaient fréquemment près des parois transversales, puis régénéraient la paroi brisée, comme on sait que le fait le *Vaucheria*, et continuaient à vivre; il en résultait que, dans cette localité, les plantes adultes ne présentaient que très rarement les extrémités flagelliformes dont elles étaient pourvues à l'origine. M. Heinricher pense que le choc produit par la chute de l'eau sur les parois épaissies favorisait beaucoup la rupture et, par suite, la multiplication végétative de la plante; d'après lui, la formation d'épaisses poutres et de gros tampons de cellulose serait donc un phé-

nomène d'adaptation aux conditions particulières dans lesquelles vivait le *Sphaeroplea.*

M. Cohn, qui en 1855 avait rencontré la plante dans un champ de pommes de terre inondé quelque temps auparavant, ne dit rien de ces ruptures, mais il mentionne au contraire expressément avoir trouvé, même aux filaments multicellulaires les plus longs, les deux extrémités capillaires. C'est dans cet état aussi qu'étaient tous les exemplaires, même les plus développés, qui ont passé sous mes yeux, mais je n'ai pu étudier que des plantes provenant des zygotes de Grätz et cultivées dans des vases de verre contenant de l'eau, ou dans un aquarium. Voulant m'assurer directement si les chocs déterminés par la chute de l'eau pouvaient avoir quelque influence sur la formation des poutres transversales et des amas de cellulose, j'ai pris une quantité de jeunes plantules récemment issues des zygotes et n'ayant encore subi aucune division cellulaire, et je les ai partagées entre deux verres de même grandeur, placés l'un à côté de l'autre dans une serre tempérée, de façon que les deux lots recevaient une chaleur et une lumière suffisantes pour une végétation énergique. Mais dans l'un des verres l'eau restait en repos, dans l'autre elle était continuellement agitée et renouvelée par une série ininterrompue de gouttes tombant d'un réservoir placé à environ 60 centim. plus haut, tandis qu'une quantité équivalente d'eau s'écoulait par un siphon débouchant au fond du vase, de sorte que, dans celui-ci, le liquide était maintenu à un niveau constant. Dans chacun des deux lots les plantules se développèrent heureusement et dans chacun il s'opéra de nombreuses divisions de cellules. Mais je n'ai pu découvrir entre eux aucune différence quant au nombre ou à l'épaisseur des poutres transversales. Si donc il est vrai, comme le prétend M. Heinricher, que les accumulations cellulosiques en question sont nées, par adaptation, de conditions biologiques déterminées, cela doit avoir eu lieu antérieurement, peu à peu, au cours d'une série de générations

qui nous sont inconnues; les circonstances venant à changer, ces accumulations ne pourront non plus disparaître que graduellement, après une suite plus ou moins longue de générations, car, ainsi qu'il a été dit, elles sont héréditaires chez les premiers descendants de la plante qui nous occupe. En ce qui me concerne, j'inclinerais plutôt à regarder cette plante comme une variété (Heinricher) ou une espèce (Kny) particulière, dont les épaisses et solides parois transversales auraient pour utilité de renforcer et de garantir de la brisure ou de l'aplatissement le long filament à minces parois extérieures, tandis que les excroissances cellulosiques seraient dues à une production anormale, s'opérant, comme chez les plantes supérieures, sous l'influence de conditions biologiques peu favorables.

Reproduction sexuée.

Un peu plus tôt ou un peu plus tard, selon que les circonstances ambiantes sont plus ou moins favorables à la vie de la plante, on voit se développer dans ses filaments les organes reproducteurs. Le phénomène préparatoire consiste en un changement du contenu de quelques cellules, lequel changement est très différent, suivant qu'il se formera des spermatozoïdes ou des oosphères. Parfois, presque toutes les cellules du filament adulte, à l'exception des cellules filiformes terminales, subissent successivement cette modification. Mais dans une même cellule, il ne se forme toujours qu'un seul des deux organes sexuels; elle devient ou bien anthéridie ou bien oogone. Les anthéridies et les oogones, produits par une même plante, sont en nombre égal ou peu différent. Le plus souvent j'ai vu se suivre quelques anthéridies (3 ou 4), puis un nombre égal d'oogones, mais parfois aussi j'ai trouvé une série de cellules transformées alternativement en organes générateurs mâles et femelles. M. Kny a fait la même obser-

vation (*l. c.*, p. 261). Le *Sphaeroplea annulina* est donc monoïque, et il reste tel même quand la plante n'est composée que de deux cellules; mais, comme il a été dit plus haut, j'ai aussi rencontré dans mes cultures des plantules faibles ne consistant qu'en une cellule unique, et qui ne donnaient naissance ou bien qu'à des spermatozoïdes ou bien qu'à des oosphères dans ce cas, le nanisme peut donc conduire à la diœcie.

Anthéridies.

Lorsqu'une cellule doit se développer en anthéridie, on voit d'abord, et peu à peu, les grands chromatophores devenir plus petits, leur enveloppe externe et leur anneau amylacé disparaître; ce dernier est probablement dissous et converti en d'autres substances. Plus tard, les pyrénoïdes eux-mêmes ne se retrouvent plus, soit qu'ils entrent également en dissolution, soit qu'ils se désagrègent en une quantité de pyrénoïdes minuscules; du moins, on voit bientôt apparaître à leur place un grand nombre de corpuscules excessivement petits, de microsomes. Les anneaux qui s'étendent en travers de la cellule conservent provisoirement leur forme, mais leur couleur verte change très vite, faisant place d'abord à un vert jaunâtre et bientôt après à un brun clair. La chlorophylle du protoplasma est alors désorganisée, et l'aspect de la cellule devient tel qu'il a été représenté par M. Cohn dans sa fig. 10*a*, Pl. XIII, et par M. Kny dans sa fig. 2, Pl. LXIII. Ensuite, les anneaux disparaissent peu à peu, par suite du déplacement des fils plasmatiques, et il se forme un réseau à larges mailles de microsomes très rapprochés les uns des autres et ordinairement groupés en fils, autour desquels se trouvent d'autres microscomes, plus isolés et plus distants; tous sont englobés dans un protoplasma hyalin et incolore, nettement limité par une couche de revêtement. Mais, pas plus que le précédent, cet aspect de la cellule n'est de

longue durée. Bientôt on voit les microsomes et le plasma incolore réunis en une masse cohérente, qui s'applique à la paroi cylindrique et enveloppe un certain nombre de grandes vacuoles ellipsoïdales, disposées à la file les unes des autres; dans ce stade, la cellule se présente donc, sur la coupe optique, comme divisée en une série de grands espaces sphériques ou ellipsoïdaux (les vacuoles), d'un diamètre presque égal à l'épaisseur de la cellule, et entourés de tous côtés d'un protoplasma contenant d'innombrables petits granules ou microsomes et nettement circonscrit par une couche cuticulaire. Ce protoplasma ne possède une épaisseur notable qu'entre les vacuoles, où il affecte, sur la coupe, la forme d'un double ménisque. Les microsomes, accumulés surtout en couche dense au pourtour des vacuoles, prennent insensiblement un mouvement vibratoire et s'agglomèrent en corpuscules ovoïdes, qui s'accroissent aussi aux dépens du protoplasma incolore ambiant. Le mouvement, d'abord lent, s'accélère peu à peu, surtout dans les parties extérieures, voisines des vacuoles; en même temps, ces vacuoles elles-mêmes entrent non seulement en mouvement vibratoire, mais deviennent aussi plus petites. Les corpuscules ovoïdes acquièrent des contours nets, en se rapprochant de la forme en poire, et bientôt sont nés les spermatozoïdes, qui, une fois pourvus de leurs deux cils, se meuvent, avec une vitesse de plus en plus grande, d'abord autour des vacuoles, puis bientôt aussi à travers le ménisque de protoplasma qui les renferme. Ce processus ne s'accomplit pas au même instant dans toutes les parties de la cellule, mais il atteint successivement les différentes masses méniscoïdes, de sorte que, dans une même anthéridie, on a l'occasion d'observer simultanément plusieurs degrés de développement des spermatozoïdes. Peu à peu tout le protoplasma de la cellule est employé à la génération de spermatozoïdes, qui continuent à s'agiter vivement, jusqu'à ce que, à travers les petites ouvertures formées entretemps dans la paroi cellulaire, ils s'échappent un à un et vont se mouvoir en tout

sens dans l'eau ambiante, pour chercher bientôt une cellule à oospores, y pénétrer par une ouverture semblable à celle qui leur a donné issue, et opérer la fécondation. Finalement, l'anthéridie ne contient plus que quelques corpuscules protoplasmiques incolores, ordinairement situés au voisinage des ouvertures dont il a été question. Dans d'autres anthéridies, toutefois, je n'ai plus vu la moindre trace de contenu. Peut-être ces quelques petits corps protoplasmiques sont-ils les restes de spermatozoïdes non arrivés à développement.

Les petites *ouvertures de la paroi cylindrique* des cellules qui deviennent des anthéridies ou des oogones se rétrécissent de dedans en dehors, comme M. Kny l'a remarqué, et pour cette raison elles ne sont bien visibles que de côté. A la face supérieure ou inférieure du filament, qui repose sur la table du microscope, on peut très difficilement les distinguer.

Pour cette même raison, je n'ai pu reconnaître le mode de *formation des ouvertures*, et j'ignore si l'un des autres observateurs du *Sphaeroplea* a été plus heureux; mais je ne fais aucune difficulté de souscrire à l'hypothèse de M. Kny (*l.c.*, p. 262), suivant laquelle ces ouvertures doivent s'être formées à l'époque où le protoplasma était encore appliqué contre la paroi de la cellule.

Ainsi qu'il était à prévoir, j'ai le mieux pu observer les ouvertures dans les anthéridies d'où les spermatozoïdes avaient disparu et dans les oogones à oosphères ou oospores développées. Dans les cellules vides, elles étaient encore nettement visibles, même à la fin de l'hiver. Le *lieu de ces ouvertures*, dont on compte un plus ou moins grand nombre (toujours plus de une) sur chaque cellule, ne paraît être soumis à aucune règle déterminée. Tantôt j'en ai trouvé deux ou trois assez rapprochées l'une de l'autre, tantôt il y avait entre elles une distance notable.

En ce qui concerne la *forme des spermatozoïdes*, je n'ai pas grand'chose de nouveau à communiquer. Ce sont de petits corps piriformes, munis à leur extrémité rétrécie de deux

longs cils, qu'on ne peut voir distinctement qu'après avoir tué les corpuscules. Pendant la vie, ces cils échappent à l'observation, par suite de la rapidité de leurs mouvements. Suivant M. Heinricher, l'extrémité étroite n'est jamais aussi longue ni aussi mince que la représente M. Cohn, et à cet égard, bien que les dimensions en longueur et en largeur des différents spermatozoïdes d'une même cellule ne laissent pas d'offrir quelque différence, mes observations sont plutôt d'accord avec celles de M. Heinricher. La forme en fuseau, atténuée aux deux bouts, dont fait mention M. Kny, n'a pas passé sous mes yeux. J'ai vu les molécules opaques, qui absorbent facilement les matières colorantes, accumulées surtout aux deux extrémités et laissant au milieu une bande incolore simple ou double (collerette, suivant M. Heinricher, *l.c.*, p. 440). Dans la partie opaque de l'extrémité postérieure se trouvent, selon M. Kny (*l.c.*, p. 261), de petits chromatophores jaunâtres et quelques granules incolores, en partie formés de fécule. M. Heinricher, au contraire, affirme que les spermatozoïdes du *Sphaeroplea* ne possèdent pas de chromatophores (*l.c.*, p. 440, note).

Ce dissentiment entre les deux auteurs tient probablement à la signification différente qu'ils attachent au mot „chromatophores." Si on le prend dans le sens où il est employé par M. Schmitz, et qu'on entende par chromatophores les corps assez gros, composés d'un pyrénoïde, d'un anneau amylacé et d'une enveloppe de plasma coloré, tels qu'ils se trouvent dans les cellules végétatives du *Sphaeroplea*, M. Heinricher a incontestablement raison. Toute la description, ci-dessus donnée, des changements dont la cellule végétative est le siège lors de la formation de l'anthéridie, le prouve suffisamment. Mais, évidemment, ce n'est pas dans cette acception que le mot a été pris par M. Kny, qui lui-même dit, quelques lignes plus haut, que lors de cette formation les gros pyrénoïdes et leurs anneaux amylacés disparaissent. Je crois donc que, sous le nom de chromatophores, il a voulu désigner le plasma fine-

ment grenu, de couleur jaune clair, que contient la partie opaque des spermatozoïdes. Quant à la présence, dans ceux-ci, de la fécule, elle me paraît douteuse. Dans l'anthéridie presque adulte je n'ai nulle part, au moyen de l'iode, pu découvrir de la fécule, et, eu égard à la fonction vitale dcs spermatozoïdes, il me semble peu probable que cette substance s'y forme. Je ne me rappelle pas non plus que, dans les spermatozoïdes de plantes analogues, la présence de la fécule ait été démontrée d'une manière certaine.

Oogones.

Les cellules qui se développent en oogones, et dont la place dans le filament de *Sphaeroplea* a déjà été indiquée ci-dessus, subissent, quant à leur contenu, une tout autre modification que celles destinées à devenir des anthéridies. Lorsque (condition préalable dans les deux cas) la cellule est devenue adulte et contient un certain nombre d'anneaux avec chromatophores, grains de chlorophylle et plasma incolore, la première préparation à la formation de l'oogone consiste, à ce que j'ai pu voir, dans l'extension du réseau des fils plasmatiques par lesquels les anneaux sont unis les uns aux autres. Cette extension paraît s'accompagner d'une augmentation de la quantité de chlorophylle, ainsi que d'une augmentation du nombre et de la grosseur des chromatophores, lesquels ne sont plus confinés presque exclusivement dans les anneaux, mais viennent aussi se placer entre ceux-ci, dans le réseau des fils plasmatiques; il en résulte que le contenu de la cellule, bien que toujours d'un vert vif, prend un autre aspect général, les anneaux étant en grande partie remplacés par un réseau à larges mailles, comme le montre la fig. 5. Pl. III.

Bientôt, toutefois, cet aspect change de nouveau. Les chromatophores et les grains de chlorophylle situés au voisinage les uns des autres se réunissent, avec le protoplasma qui les

entoure, en masses relativement grandes, vertes, opaques et de forme irrégulière, ordinairement plus ou moins étoilée; ces agglomérations sont rattachées par une multitude de minces fils plasmatiques à la paroi cylindrique de la cellule (ou, plus exactement, au plasma incolore pariétal), de sorte que l'ensemble donne l'impression de masses plasmatiques astériformes suspendues dans la cavité de la cellule. M. Cohn et M. Kny ont bien rendu cet aspect, le premier dans ses fig. 6*b* et 7*a*, Pl. XIII, le second dans sa fig, 1, Pl. LXIV. Les masses astériformes ainsi alignées, et dont le diamètre est souvent peu inférieur à celui de la cavité de la cellule, sont primitivement séparées l'une de l'autre par une couche plasmatique très mince, nettement limitée, placée perpendiculairement à la paroi cylindrique de la cellule, et ayant toute l'apparence d'une mince paroi transversale. La réaction de l'iode, toutefois, aussi bien que l'addition de substances déshydratantes, montre immédiatement qu'il ne s'agit pas d'une paroi cellulosique, mais d'une petite couche de plasma.

Au reste, l'emploi des réactifs est superflu, car, lors du développement ultérieur des oogones, on voit disparaître ces parois apparentes. Bientôt, en effet, il s'opère une contraction considérable, due à ce que le protoplasma expulse de l'eau; les rayons ou pseudopodes des figures astériformes sont résorbés, et la pseudo-paroi transversale se dédouble en deux lamelles, qui se détachent de la paroi cellulaire, se disposent chacune autour d'une des masses plasmatiques, et par contraction ultérieure s'appliquent contre ces masses, qui prennent de plus en plus la forme ovoïde ou globuleuse (comp. Cohn, fig. 7, Pl. XIII; Kny, fig. 2, Pl. LXIV).

Le contenu du jeune oogone s'est ainsi transformé en une série de corps ovoïdes ou sphériques, opaques et de couleur verte, surtout au milieu Ces corps, qui ne sont autre chose que les oosphères presque adultes, se condensent encore davantage et sont alors verts dans toute leur étendue, à l'exception d'une petite partie incolore de la périphérie, que

M. Cohn et M. Kny (*l. c.*, p. 262) ont appelée, par analogie avec ce qui se passe chez d'autres Algues, tache conceptive (*Empfängnissfleck*), parce qu'on présume qu'elle est le siège de l'action fécondatrice des spermatozoïdes. J'ai pu observer cette tache dans quelques cas, mais non pas toujours. Par suite de la contraction dont il vient d'être parlé, le diamètre des oosphères est devenu beaucoup plus petit que celui de la cellule: aussi les voit-on souvent se rapprocher l'une de l'autre et se disposer en une rangée double, de manière à laisser vide une partie de l'oogone.

Les modifications qui viennent d'être décrites s'accomplissent très rapidement et en même temps que, dans une cellule voisine, se forment les spermatozoïdes. La paroi cylindrique de l'oogone est maintenant percée aussi des petites ouvertures dont il a été question plus haut, de sorte que rien ne s'oppose plus à la fécondation des oosphères.

Fécondation.

La fécondation a lieu comme il a été dit p. 100, par la pénétration des spermatozoïdes dans l'oogone et par leur union avec les oosphères. Il est inutile d'entrer dans les détails de ce phénomène, après tout ce qu'en a déjà fait connaître M. Cohn. Chaque fois que j'ai vu cet attrayant spectacle, j'ai trouvé pleinement confirmée la description de l'éminent observateur. Mais, pas plus que M M. Cohn, Heinricher et Kny, je n'ai eu-la chance de constater directement la réunion du spermatozoïde à l'oosphère. Pourtant je crois pouvoir l'admettre, car, peu de temps après la fécondation, lorsque l'oosphère s'entoure d'une mince paroi et devient oospore, on ne voit plus trace des spermatozoïdes et l'oogone ne contient alors plus qu'nn certain nombre d'oospores.

Noyaux cellulaires.

Il me reste une question à examiner, celle de savoir s'il existe des noyaux dans les cellules du *Sphaeroplea.* C'est à dessein que je n'en ai rien dit jusqu'ici, parce que je voulais traiter ce sujet dans son entier, et que, après ce qui précède, je serai mieux à même d'y avoir égard aux différentes phases de développement du *Sphaeroplea,* sans être obligé de rompre à chaque instant, par la mention de détails étrangers, le cours de l'exposition. A ce sujet se rattache d'ailleurs pour moi le devoir personnel de reconnaître l'exactitude d'une observation de M. Heinricher, contraire à l'opinion que j'avais énoncée antérieurement.

Ni M. Cohn, ni ses prédécesseurs Fresenius [1]) et Cienskowski [2]), ne parlent de l'existence de noyaux chez le *Sphaeroplea,* et il en est encore de même pour M. Alex. Braun, là où, dans son ouvrage classique : *Die Verjüngung in der Natur* [3]), en traitant des divers modes de division et de multiplication des cellules, il décrit aussi en détail la formation des spores du *Sphaeroplea.* A cette époque, notre connaissance de la distribution et de la signification des noyaux cellulaires était beaucoup plus imparfaite qu'aujourd'hui, et l'on ne disposait pas des puissantes ressources optiques du temps actuel; en outre, la méthode de durcissement et de coloration des tissus, qui a conduit à des résultats si inattendus, n'était pas découverte, et il n'y a donc rien d'étonnant à ce que personne n'eût trouvé de noyaux dans notre genre d'Algues.

Mais, moi non plus, je n'y parvins pas au premier abord. Bien que, lors de mes premières recherches sur le *Sphaeroplea,* les poutres transversales si caractéristiques et les phénomènes de la

---

1) *Bot. Zeit.*, 1851, p. 241 et suiv. Ce que M. Fresenius, p. 209, fig. 31, indique comme vésicule nucléaire, ne me paraît pas être un noyau de cellule.

2) *Bot. Zeit.*, 1855, p. 777 et suiv.

3) p.p. 176 et 289.

fructification eussent attiré mon attention à un plus haut degré que la question de savoir si les cellules possédaient des noyaux, cette question ne fut pourtant pas négligée. Des filaments de *Sphaeroplea* ayant été, suivant le précepte de M. Strasburger, plongés pendant quatre heures dans l'acide chromique à 1% puis lavés à différentes reprises avec de l'eau distillée, ces filaments, devenus tout à fait incolores, et qui fournirent d'ailleurs d'excellents matériaux d'étude, furent traités, mais sans succès, par divers agents colorants, notamment par la solution de carmin, la cochenille alunée, l'hématoxyline, l'éosine, l'acétate de rosaniline. Dans leur plasma se montraient, à la vérité, les différences connues entre les microsomes et l'hyaloplasma, dont les premiers avaient absorbé la matière colorante, tandis que le second était resté incolore; dans les chromatophores, les pyrénoïdes se voyaient aussi colorés tantôt plus, tantôt moins; mais, quant à des noyaux cellulaires, il me fut impossible d'en découvrir avec certitude, de sorte que, en faisant ma communication préliminaire à l'Académie, dans la séance du 26 mai 1883, je crus pouvoir dire que les cellules du *Sphaeroplea* sont dépourvues de noyaux.

Le même insuccès était réservé, plus tard, à M. Kny [1]), qui déclara ne pas avoir obtenu de résultats satisfaisants par l'emploi du mélange d'acide picrique et de nigrosine, et qui, resté dans l'incertitude à cet égard, ne représenta pas de noyaux sur ses excellentes „*Wandtafeln*", bien que M. Heinricher en eût déjà affirmé l'existence et les eût même figurés.

Ce dernier auteur, dont les recherches, ainsi qu'il a été dit plus haut (p. 94), furent publiées quelques mois après ma communication, prétend que, chez le *Sphaeroplea*, les noyaux se laissent mettre en évidence avec une facilité particulière. Tant avec les matériaux traités à l'alcool qu'avec des objets durcis dans l'acide osmique à 1% ou dans l'acide

---

[1]) *l. c.*, p. 261, Note.

picrique, il put obtenir, par l'hématoxyline ou par le picro-carmin, de bonnes colorations des noyaux. Pour différents stades de développement du *Sphaeroplea*, il représente, bien qu'en des figures un peu défectueuses et incomplètes, la situation et le nombre des noyaux qu'il a trouvés. Dans une note [1]), où il combat ma conclusion, M. Heinricher fait en outre remarquer que ses noyaux ne sont pas des pyrénoïdes, c'est-à-dire, des centres de boules d'amidon, et que, tout en n'ayant pas accordé beaucoup d'attention à ces derniers, il croit pourtant qu'ils se rencontrent également chez le *Sphaeroplea*.

Je n'ai pas besoin de dire que ce résultat m'imposait l'obligation de nouvelles recherches. Sans doute, l'expérience m'avait appris l'inexactitude de cette assertion de M. Heinricher, que les noyaux du *Sphaeroplea* se laissent très facilement déceler; mais, antérieurement, j'avais aussi eu l'occasion de me convaincre que, lorsqu'il s'agit d'amener des noyaux dans un état où eux-seuls absorbent la matière colorante et la retiennent au lavage, le succès de l'opération dépend souvent de circonstances difficiles à démêler; aussi M. Strasburger, une autorité en cette matière, dit-il, avec raison: „il arrive, trop fréquemment, qu'un procédé de coloration, d'ailleurs éprouvé, échoue par des causes inconnues, de sorte qu'on ne doit jamais fonder une conclusion sur un cas isolé." [2]).

J'entrepris donc de nouvelles cultures (voir ci-dessus, p. 104), tant avec une partie des matériaux reçus en 1883 qu'avec des zygotes plus récentes, que M. le professeur Leitgeb voulut bien m'envoyer de Grätz; ces essais furent répétés plus d'une fois, et même encore, pour vérifier quelques points douteux, pendant l'automne dernier. J'obtins ainsi, en quantité suffisante, des objets d'étude d'âges divers, qui furent examinés à l'état frais, aussi bien qu'après avoir été durcis. Dans les filaments vivants, je ne pus jamais découvrir de

---

1) *l. c.*, p. 438.

2) *Das botanische Practicum*, p. 330.

noyaux, pas plus maintenant que lors de mes observations antérieures. Pour le durcissement, j'employai soit l'alcool, soit l'acide chomique à 1 %, où les plantes restaient pendant quatre heures, soit l'acide picrique concentré, où elles séjournaient ordinairement vingt quatre heures, parfois un peu plus longtemps. Dans les deux derniers cas, on lavait à plusieurs reprises avec une grande quantité d'eau distillée, puis les préparations étaient trempées dans l'eau pendant quelques jours, jusqu'à ce que toute trace d'acide libre eût disparu; les objets ainsi durcis étaient conservés, pour l'étude ultérieure, dans le mélange, recommandé par M. Strasburger, de 1 partie d'alcool, 1 partie de glycérine et 8 parties d'eau distillée. A l'origine, j'ajoutais quelquefois une goutte d'acide phénique, pour prévenir la formation de moisissures, mais je renonçai à cette addition après avoir reconnu qu'elle nuisait parfois à la coloration subséquente. Traités par l'acide chromique, ou plongés dans l'alcool, les filaments verts étaient complètement décolorés; quand on avait fait usage d'acide picrique, ils présentaient parfois encore une teinte vert jaunâtre, qui ne disparaissait qu'à la suite d'un séjour plus prolongé dans l'acide, ou après immersion ultérieure dans l'acide chromique. Le contenu des cellules ainsi traitées était peu ou point contracté, et les fils plasmatiques, aussi bien que les chromatophores (maintenant décolorés) avec leur anneau amylacé et leur pyrénoïde, ressortaient très nettement.

Ces préparations furent soumises à l'action de diverses matières colorantes, parmi lesquelles, finalement, le picrocarmin, la solution aqueuse d'hématoxyline et le carmin de Beale donnèrent les meilleurs résultats, la seconde, surtout, lorsqu'elle était restée quelque temps à l'air et partiellement changée en hématéine-ammoniaque. Avec toutes, je trouvai dans les cellules du *Sphaeroplea* une multitude de très petits noyaux, souvent beaucoup plus que n'en indique M. Heinricher.

Par le picrocarmin, les noyaux étaient colorés en rouge

jaunâtre (voir fig. 12 Pl. IV), le reste du plasma demeurant incolore ; par l'hématoxyline, ils devenaient bleus. Dans ce dernier cas, il arrivait souvent que la couleur ne se manifestait bien que 24 heures après le traitement par l'agent colorant et le lavage à l'eau. Après la coloration, tant au moyen du picrocarmin qu'au moyen de l'hématoxyline, les préparations étaient placées dans le mélange précité d'alcool, de glycérine et d'eau, ou bien dans la glycérine étendue, où elles se conservaient parfaitement. Quelques-unes d'entre elles, aujourd'hui âgées de plus de deux ans, ne sont encore nullement pâlies. Les objets durcis dans l'acide picrique se montrèrent aptes à absorber les deux matières colorantes; ceux dont le durcissement avait été produit par l'acide chromique s'imprégnaient facilement de l'hématoxyline, mais n'absorbaient pas toujours, également bien, le picrocarmin. Par contre, j'ai trouvé que le vert de méthyle, qui en général rend de si bons services pour la coloration des noyaux, ne convient pas au *Sphaeroplea.* La matière colorante ne fut que peu ou point absorbée.

Dans les derniers temps, je me suis surtout servi avec succès du carmin de Beale; après y être restées pendant quelques jours, les préparations étaient lavées à l'eau, puis conservées dans le mélange de glycérine, d'alcool et d'eau, mélange qui, abandonné à l'air, se changeait peu à peu en glycérine saturée d'eau dans les conditions hygrométriques ordinaires; ainsi traité, le contenu des cellules n'éprouvait pas de contraction. Dans ce carmin de Beale, les noyaux devenaient rouge carmin, avec une teinte encore plus foncée chez les nucléoles ou les microsomes du noyau. Pour peu que la coloration fût intense, les pyrénoïdes aussi étaient légèrement teintés, mais autrement que les noyaux, de sorte que ceux-ci se distinguaient de la manière la plus nette. Dans ces essais — où mon assistant, M. Woltering, me secondait avec beaucoup de zèle, — le hasard révéla que les variations de température ont une influence très notable sur la coloration. Des filaments de *Sphaeroplea,* durcis par l'acide picrique ou par l'acide chromique, et qui,

après avoir été lavés à l'eau distillée, étaient restés quelques jours dans le carmin de Beale, n'avaient absorbé que peu ou point de matière colorante. Mais cette expérience avait lieu en hiver, alors que la température de mon cabinet de travail, dans le laboratoire, s'abaissait, le soir et la nuit, jusqu'à 2 ou 3° C., ou même au-dessous. Or, il suffit de réchauffer jusqu'à 25°, tout au plus jusqu'à 30° C., pour que, en une demi-heure de temps, une magnifique coloration apparût dans les noyaux. Une légère élévation de température peut donc être souvent utile, lorsque la coloration tarde à se produire ou est très faible.

Si les méthodes de coloration, dont il vient d'être parlé, me donnaient le moyen de découvrir et d'étudier les noyaux dans des filaments de *Sphaeroplea* déjà développés, il n'était guère possible d'appliquer ce traitement aux jeunes plantules qui, à peine passées de l'état de zoospores à celui de petits corps fusiformes, ne mesuraient que $0^{mm},005$—$0^{mm},008$ en longueur et pas même $0^{mm},001$ en largeur. Lors de l'opération ayant pour but d'enlever l'excès d'acide, ces plantules devaient être entraînées par les eaux de lavage, sans possibilité de les retrouver et de les recueillir. J'essayai encore, après durcissement d'une petite quantité de jeunes plantules, de les porter sur un filtre, de les y laver jusqu'à ce que l'eau ne présentât plus de réaction acide, puis de les enlever avec précaution mais ce procédé, dont l'application eût d'ailleurs exigé plus de matériaux que je n'en avais à ma disposition, ne donna pas non plus de bons résultats. Ce fut donc avec beaucoup d'intérêt que je pris connaissance d'un article de M. Pfitzer (*Deutsche botan. Berichte*, I, p. 44), qui, arrêté dans ses recherches sur les Bacillariées par la même difficulté, avait, après maints tâtonnements, trouvé dans le mélange de nigrosine et d'acide picrique un moyen de durcir et de colorer simultanément, sans qu'il fût nécessaire d'enlever la matière colorante en excès. J'ai employé avec succès cette picro-nigrosine, tant en solution alcoolique qu'en solution aqueuse. Elle communique, dans les filaments développés, une légère teinte bleu

sale au protoplasma, et une couleur d'un rouge brunâtre foncé aux noyaux, comme le montre la fig. 13. Pl. IV. Pour les jeunes états mentionnés ci-dessus, la méthode se laissait appliquer par l'addition d'une goutte du réactif à une goutte suspendue dans laquelle avaient germé des zygotes. Plus tard, j'ai réussi à obtenir aussi de bonnes colorations, pour ces jeunes états, à l'aide du picrocarmin. Il est vrai que l'objet tout entier était alors coloré en rouge clair, mais les noyaux, et même les nucléoles, ne s'en laissaient pas moins distinguer d'une manière nette et précise. Dans les fig. 1, 2 et 3 Pl. III, où la coloration des noyaux a été obtenue par ce moyen, on a, pour plus de clarté, omis la faible teinte du plasma.

Notons enfin que, si l'on veut apprendre à bien connaître les noyaux dans les divers états du *Sphaeroplea*, on doit, vu leur extrême petitesse, faire usage de grossissements très forts. Aussi, dans les derniers temps, me suis-je servi de préférence, pour cette étude, d'objectifs à immersion homogène, spécialement de Zeiss $\frac{1}{18}$; j'ai également utilisé avec beaucoup d'avantage les nouveaux objectifs apochromatiques de cet habile constructeur, objectifs dont le grand angle d'ouverture et la pureté des images colorées m'ont été d'un précieux secours dans ces recherches.

Les résultats auxquels je suis parvenu, par les voies indiquées, sont les suivants:

Dans les plantules très jeunes, qui venaient de prendre la forme de fuseau, je trouvai un noyau unique, situé au milieu, arrondi, renferment un nucléole bien distinct, et de part et d'autre du noyau on voyait un chromatophore dans l'axe longitudinal de l'objet (fig. 1) Pl. III; une plantule un peu plus grande montrait deux pareils noyaux, situés à égale distance du milieu (fig. 2); une troisième, qui était plus de deux fois aussi grande que la précédente et aussi un peu plus épaisse au milieu, possédait quatre noyaux, dont deux, un peu plus petits et voisins l'un de l'autre, étaient probablement nés, peu de temps auparavant, de la division d'un noyau-mère (fig. 3);

dans cette plantule je trouvai, outre les gouttelettes d'huile qui existaient en plus ou moins grand nombre dans tous les jeunes individus, quatre chromatophores avec anneaux amylacés distincts autour des pyrénoïdes. On voyait déjà ici, circonstance fréquente dans les plantes plus âgées, les noyaux situés au voisinage immédiat des chromatophores. Mes observations confirment donc ce que M. Heinricher a communiqué (*l. c.*, p. 448) au sujet de la présence et du nombre des noyaux dans les individus très jeunes. Pas plus que lui, je n'ai pu constater directement la division des noyaux, mais j'ai souvent vu, aussi dans des exemplaires plus âgés, deux noyaux un peu plus petits situés très près l'un de l'autre, à des places où ailleurs il ne s'en trouvait qu'un seul; ces deux noyaux étaient en outre plus ou moins aplatis au côté par lequel ils se regardaient. J'ai également observé, à différentes reprises, des noyaux de forme un peu allongée et pourvus de deux nucléoles (fig. 6 *a* et *c*), ce qui pouvait être considéré comme le début d'une division. D'après cela, il ne me semble pas douteux que les noyaux du *Sphaeroplea* ne se multiplient généralement par division en deux noyaux-filles.

A mesure que les filaments du *Sphaeroplea* se développent et que le nombre des anneaux augmente, ce qui s'accompagne de la division et de la multiplication des chromatophores, s'opérant comme il est exposé en détail dans l'excellent ouvrage de M. Schmitz: *Die Chromatophoren der Algen*, p. 90 et suiv., on voit croître aussi le nombre des noyaux cellulaires. Ordinairement chaque anneau en contient deux ou trois, qui sont en général situés à proximité immédiate des pyrénoïdes à enveloppes sphériques d'amidon, et dont le nombre est souvent, mais non toujours, égal à celui des pyrenoïdes dans chaque cellule. Lorsque les noyaux cellulaires se trouvent à l'état de repos relatif, c'est-à-dire, non en voie de division, leur forme est d'ordinaire globuleuse ou ellipsoïdale, parfois plus ou moins aplatie en lentille, et leur centre est occupé par un nucléole bien distinct, auquel la matière colorante communique une

teinte très foncée. La substance du noyau est alors assez homogène, bien que souvent aussi on y voie quelques petits points foncés ou corpuscules de chromatine. Je n'ai pu y distinguer des figures nucléaires déterminées ou un réseau de fils; en aucun cas, du moins, il ne m'a été possible d'y reconnaître cette série de modifications des corps chromatiniens, stades de division successifs, qui ont été décrites, par M. Strasburger et par d'autres auteurs, comme s'opérant lors ce qu'on appelle la „division nucléaire indirecte."

Il se peut que la faible dimension de ces noyaux, qui sous des grossissements de plus de 2000 diamètres ne présentent qu'une image de quelques millimètres de grandeur, nous empêche d'observer de pareilles modifications; j'estime plus probable, toutefois, que chez ces cellules à noyaux multiples on a affaire à la „division nucléaire directe", dans laquelle ne sont pas parcourues toutes ces formes différentes, mais où il se produit un étranglement des noyaux, précédé de l'étranglement ou de la division des nucléoles.

Avec la divion cellulaire — dans le cas actuel, avec la formation des épaisses parois transversales, pourvues de tampons cellulosiques de formes variées, — la division nucléaire n'a rien de commun. La formation de ces parois a lieu par apposition contre la paroi extérieure, comme nous l'avons dit plus haut, p. 115. Et là même où les tampons en voie de naissance ou d'accroissement sont juxtaposés à un anneau avec chromatophores et pyrénoïdes, ou sont unis à cet anneau par des fils plasmatiques, là même les noyaux de cet anneau ne diffèrent, ni par la forme ni par la structure, des noyaux qu'on rencontre habituellement dans les anneaux.

Par contre, dans quelques cellules de filaments adultes de *Sphaeroplea* j'ai trouvé, bien que l'aspect des anneaux n'eût guère changé, des noyaux si nombreux et de dimensions si différentes, que j'hésitai longtemps à les reconnaître comme tels. N'était-il pas possible que les gouttelettes d'huile, contenues dans le protoplasma, eussent également absorbé la

matière colorante? A cela, toutefois, on pouvait répondre que ces gouttelettes luisantes et réfractant fortement la lumière ne se présenteraient sans doute pas avec les mêmes teintes que les noyaux cellulaires durcis; or, entre les corpuscules colorés il y avait bien différence de taille, mais aucune différence de teinte ne s'y laissait constater. Lorsque j'eus reçu l'intéressant mémoire de M. Pfeffer „*Ueber Aufnahme von Anilinfarben in lebenden Zellen*" (*Untersuchungen a. d. botan. Inst. in Tübingen*, T. II), et que j'y eus vu que les vésicules de tannin possèdent par excellence le pouvoir d'absorber la matière colorante, l'idée me vint que peut-être ces vésicules avaient part à la coloration de mes préparations. En conséquence, j'examinai les cellules du *Sphaeroplea* à ce point de vue spécial, mais, ni avec les sels de fer, ni avec le bichromate de potasse, ni avec le réactif recommandé postérieurement par M. Moll (*Maandblad v. Natuurwetenschappen*, T. XI, p. 27), je n'y pus déceler la présence du tannin.

De nouvelles recherches vinrent d'ailleurs confirmer mon idée primitive, que les objets en question étaient réellement des noyaux. Je les reconnus pour tels à l'aide de différentes matières colorantes. Avec le picro-carmin ils devenaient rouges (fig. 12), avec la picro-nigrosine rouge brunâtre, tandis que le plasma prenait une teinte bleu sale (fig. 13); avec l'hématoxyline ils se coloraient en bleu (fig. 23). Et lorsque je les étudiai par les moyens optiques les plus perfection. nés, savoir, à l'aide du nouvel objectif aprochromatique à immersion homogène de Zeiss, possédant un angle d'ouverture de 1,30 et une distance focale de 2,0, je trouvai dans plusieurs de ces noyaux des nucléoles, et aussi, dans quelques-uns, des états de division, comme le montre la fig. 23. La comparaison avec d'autres préparations m'apprit que les cas dont il s'agit représentaient un premier stade du processus de la formation des spermatozoïdes. A un moment où les anneaux avec chromatophores n'offrent encore aucune modification notable, sauf que les fils plasmatiques qui les relient paraissent

devenir plus abondants, les noyaux se divisent à différentes reprises par voie d'étranglement, en se nourrissant aux dépens du cytoplasma qui les entoure. Il n'y a pas nécessairement égalité de dimension entre les segments qui résultent de ces divisions, et chez tous la nutrition n'est pas non plus également active; de là vient que, dans ce stade, le volume des noyaux-filles peut être très différent.

Lors du développement ultérieur, toutefois, cette différence disparaît peu à peu. C'est ainsi que, dans un stade plus avancé, représenté dans la fig. 7, Pl. III, où les noyaux sont colorés par le carmin de Beale, la plupart avaient à peu près la même grandeur. A ce moment, on n'y distinguait pas de nucléoles, mais bien un nombre plus ou moins considérable de corpuscules chromatiniens excessivement petits, dont les uns offraient l'aspect de petits points, les autres celui de bâtonnets, sans qu'il fût possible toutefois d'y reconnaître des figures déterminées. Ces noyaux, comme le montre la figure, étaient maintenant distribués assez uniformément dans la masse plasmatique à grandes vacuoles qui avait remplacé les anneaux. Le nombre des pyrénoïdes à enveloppe d'amidon avait diminué, mais pourtant on voyait encore, épars dans le plasma, plusieurs grands chromatophores composés de ces deux éléments et qui, dans la masse durcie, tranchaient vigoureusement sur leur entourage.

Bientôt, ces derniers chromatophores disparaissent à leur tour; l'amidon est consommé et les pyrénoïdes se divisent ou se dissolvent probablement dans la masse plasmatique; du moins, ils ne sont plus reconnaissables individuellement. Les noyaux, par contre, se multiplient encore davantage. Ce stade est représenté dans les fig. 8 et 9. Dans l'une et l'autre on trouve un grand nombre de noyaux à contours nets, parfois allongés, parfois de forme anguleuse, contenant dans leur masse des microsomes de teinte plus foncée, et plongés dans un plasma finement grenu, entrecoupé de grandes vacuoles. Dans la fig. 9 on voit encore quelques noyaux en voie de

division, sous la forme de biscuit, et plusieurs autres dont le rapprochement, ainsi que l'aplatissement sur les faces tournées l'une vers l'autre, prouvent que la division ou l'étranglement est toute récente. Les noyaux se présentent en outre, d'une manière plus ou moins distincte, comme centres de corps plasmatiques particuliers de forme ellipsoïdale, les futurs spermatozoïdes. Par la suite, cette apparence s'accuse de plus en plus, et bientôt les spermatozoïdes sont nettement reconnaissables, comme le montre la fig. 10, dessinée, de même que les deux précédentes, d'après nature. Chaque spermatozoïde contient un seul noyau, qui occupe une grande partie du côté postérieur élargi; ce noyau est parfaitement limité et ordinairement de forme ellipsoïdale. Dans la partie antérieure du spermatozoïde, il n'y a pas de masse nucléaire. Entre les spermatozoïdes, dont les cils ne sont pas encore bien distincts dans ce stade, on ne trouve plus de noyaux. Chacun des noyaux-filles devient donc partie essentielle d'un spermatozoïde, qui, d'abord encore entouré de masse plasmatique, absorbe celle-ci dans la dernière phase de son développement; il en résulte, comme nous l'avons dit plus haut, qu'après l'essor des spermatozoïdes adultes il ne reste plus, dans la cellule devenue anthéridie, aucune trace du contenu protoplasmatique, ou tout au plus une trace à peine perceptible.

Tout autre est le sort des noyaux dans les cellules *femelles* du *Sphaeroplea*. Ici encore, les apprêts de la reproduction sexuée commencent par une modification de l'arrangement des chromatophores, des noyaux et du plasma, les anneaux que formaient ces éléments étant remplacés par un réseau à mailles plus ou moins larges; mais, pendant cette modification, le nombre des noyaux n'augmente pas sensiblement. Ils changent seulement de place et se trouvent alors ordinairement aux points nodaux du réseau. Ils conservent leur forme ronde ou ellipsoïdale, ainsi que leurs nucléoles bien distincts, à teinte foncée. Pendant la modification ultérieure du contenu plasmatique, — lequel se contracte en amas

irréguliers ou astériformes, unis par de minces fils au plasma pariétal, et séparés l'un de l'autre par des filaments plasmatiques déliés, dont l'ensemble fait l'effet d'une mince cloison, — les pyrénoïdes, avec les grosses boules d'amidon qui les enveloppent, restent intacts, et les noyaux se placent au centre de l'amas. En même temps, le nombre des noyaux paraît diminuer. Tandis que chaque amas renferme trois ou quatre chromatophores avec pyrénoïdes et anneaux amylacés, je n'y ai trouvé, comme l'indique la fig. 11, qu'un ou deux noyaux. Là où il existait deux noyaux, ceux-ci étaient accolés l'un à l'autre; lorsqu'on n'en voyait qu'un seul, il était grand et un peu allongé. Dans les deux cas, les nucléoles avaient disparu, et on voyait les corpuscules chromatiniens, sous la forme de points ou de bâtonnets, distribués en figures irrégulières dans la masse du noyau. Selon toute apparence, plusieurs noyaux se confondent donc en un seul. Bien que je n'aie pas observé directement cette fusion, je la tiens pour plus probable que la résorption de quelques-uns des noyaux dans la masse plasmatique. Il n'y a aucune raison, me semble-t-il, pour que, des noyaux primitifs équivalents, les uns s'évanouissent et les autres continuent à vivre. Pendant la fécondation, d'ailleurs, il s'opère certainement une fusion de noyaux lorsque le spermatozoïde disparaît dans l'oosphère, et il en est de même chez les Phanérogames, dans le sac embryonnaire; le phénomène n'est donc pas sans analogues. En tout cas, dans ce stade de développement, le nombre des noyaux est moindre que dans le stade antérieur.

Dans les oosphères et les oospores fécondées qui ne sont revêtues que d'une seule et mince paroi, je n'ai jamais rencontré plus d'un noyau, tandis qu'il s'y trouvait toujours 2, 3 ou 5 grands chromatophores avec pyrénoïdes et sphères d'amidon. C'est ce dont la fig. 24 Pl. IV présente une couple d'exemples. Le noyau y était revenu à l'état de repos, avec nucléoles distincts.

Dans les oospores à paroi épaissie, — l'état dans lequel les

zygotes passent l'hiver, — je n'ai, pas plus que mon devancier, pu déceler le noyau par les procédés de coloration. La paroi était si résistante que, même après durcissement prolongé, la matière colorante ne pénétrait pas. Je présume toutefois, avec M. Heinricher, que la zygote reste uninucléaire jusqu'au début de la germination. A ce moment, le contenu subit une importante modification, qui s'accompagne probablement de la division des noyaux, car chacune des zoospores ou, plus exactement, chacune des plantules fusiformes en lesquelles les zoospores se transforment, possède initialement un noyau; or, d'après les idées courantes, un noyau cellulaire ne se forme pas spontanément, mais est héréditaire.

De ce qui précède, il résulte donc que les cellules du *Sphaeroplea* sont multinucléaires. Nous avons indiqué le rôle que ces noyaux jouent et les modifications qu'ils éprouvent dans la formation des spermatozoïdes et des oosphères, particularités qui, bien que présumées, n'avaient pas, à ma connaissance, été directement démontrées jusqu'ici. Les noyaux se divisent par étranglement, ils ne prennent aucune part à la division des cellules. Mes observations harmonisent parfaitement avec celles de M. Schmitz: „*Die vielkernigen Zellen der Siphonocladiaceen*" et de M. Strasburger: *Ueber den Theilungsvorgang der Zellkerne*", et je crois devoir rapporter le cas ici décrit à ce que M. Flemming a appelé la „division nucléaire directe", car, à mon avis, il ne peut être question de fragmentation des noyaux que chez des organes d'où la vie se retire et où les noyaux n'ont plus de rôle à remplir.

Explication des Figures.

PLANCHE III.

Fig. 1. Jeune plantule de *Sphaeroplea annulina* à un seul noyau, traitée par le picrocarmin ammoniacal. Le noyau coloré en rouge carmin. Grossissement 900/1.

Fig. 2. Plantule un peu plus âgée, à 2 noyaux. 900/1.

Fig. 3. Plantule plus âgée, à 4 noyaux. La figure n'en représente que la partie centrale. 900/1.

Fig. 4. Partie d'une cellule adulte de *Sphaeroplea*, après durcissement dans l'acide chromique à 1 °/₀ et coloration par le carmin de Beale. Le segment contient trois anneaux, dont chacun avec 1 ou 2 noyaux cellulaires *k*, et avec 1 ou 2 chromatophores *c*, dans lesquels l'anneau d'amidon *z* et le pyrénoïde *p* se voient distinctement. 1500/1.

Fig. 5. Partie d'une cellule, traitée comme ci-dessus, dans laquelle apparaissent les premiers indices de la formation des oosphères, consistant en une distribution plus réticulaire du plasma, des noyaux et des chromatophores. Les lettres *c*, *k*, *p* et *z* ont la même signification que dans la figure précédente. 1500/1

Fig. 6, *a*, *b*, *c*, et *d*. Parties de cellules, avec noyaux contenant 1, 2 ou 3 nucléoles. Les noyaux colorés par le carmin. 1000/1.

Fig. 7—10. Parties de cellules où se voient différents stades de la formation des spermatozoïdes, durcies dans l'acide chromique, puis colorées par le carmin de Beale. Dans la fig. 7, les anneaux de plasma ont disparu, les chromatophores avec pyrénoïde et anneau d'amidon existent encore en partie, le nombre des noyaux est augmenté, et dans plusieurs d'eux les corpuscules chromatiniens affectent un groupement particulier. Çà et là, par exemple en *d*, *d*, on voit des traces de division nucléaire actuelle. 1200/1. Dans la fig. 8, les chromatophores ont disparu, les noyaux se sont encore multipliés. Fig. 9, comme la précédente. Différents noyaux se montrent groupés deux à deux et aplatis sur les faces qui se regardent, en suite d'une division récente. 1500/1. Fig. 10. Spermatozoïdes presque adultes, au milieu d'un plasma incolore, finement grenu. 1500/1. Partout, dans les fig. 7—10, les noyaux sont colorés en rouge carmin.

Fig. 11. Parties d'une cellule, après durcissement dans l'acide chromique et coloration par le carmin de Beale, présentant quelques masses plasmatiques irrégulières, plus ou moins étoilées, qui se transformeront en oosphères. Stade postérieur à celui représenté dans la fig. 5. Les chromatophores sont conservés, et dans chacune des masses encore unies par des fils on voit 1 ou 2 gros noyaux *k*. Ceux-ci sont colorés en rouge carmin dans la figure 1500/1.

PLANCHE IV.

Fig. 12. Partie d'une cellule, où se manifestent les premiers indices de la formation des spermatozoïdes, indices consistant en une division multipliée et répétée des noyaux. Les noyaux colorés en rouge jaunâtre, à la suite du durcissement dans l'acide picrique et du traitement par le picrocarmin. 540/1.

Fig. 13. Cellule analogue et à peu près dans le même stade, colorée, après durcissement dans l'acide picrique, par une solution aqueuse de nigrosine. Les noyaux se sont teints en rougeâtre, le plasma en bleu. 540/1.

Fig. 14, *a*, *b* et *c*. Exemples de parois transversales régulières des cellules; *a*. paroi transversale ordinaire, pleine; *b*. paroi transversale annulaire, ouverte au centre, vue en section: *c*. paroi du même genre, fermée en haut et en bas par un tampon de cellulose. 800/1.

Fig. 15. Première ébauche d'une paroi transversale, consistant en deux épaississements diamétralement opposés de la paroi extérieure, formés par apposition. 800/1.

Fig. 16. Deux parois transversales mortes, isolées, vues d'en haut. L'une d'elles est colorée par le réactif de Schultz, pour montrer l'ouverture centrale. 800/1.

Fig. 17 et 18. Exemples de parois transversales irrégulières et d'excroissances cellulosiques, montrant les couches dans de ces parois. 800/1.

Fig. 19. Partie d'une cellule vivante. En *x* excroissance cellulosique locale, entourée des deux côtés par une accumulation de plasma à chlorophylle. La communication entre les deux parties de la cellule n'est pas interrompue par cette excroissance, mais seulement rétrécie. 800/1.

Fig. 20. Partie d'une cellule avec des zygotes en germination *z*, entre lesquelles on voit quelques zoospores *s*, pourvues des petits points rouges et verts. Dessinée d'après nature. 600/1.

Fig. 21 et 22. Excroissances de cellulose. Fig. 21, près de l'extrémité du filament. Fig. 22. Pointe du filament devenue tout à fait solide par la formation de cellulose; colorée en bleu au moyen du réactif de Schultz. 800/1.

Fig. 23. Partie d'une cellule, durcie dans l'acide picrique concentré, puis traitée par une solution aqueuse d'hématoxyline, qui a colorè les noyaux en bleu. Premier stade de la formation des spermatozoïdes, à peu près du même âge que celui des fig. 12 et 13. 1500/1.

Fig. 24. Deux oospores fécondées ou zygotes, pourvues d'une première paroi: traitées toutes les deux par l'acide chromique, puis par le carmin de Beale. Dans chaque oospore 1 noyau (coloré en rouge dans la figure) et 1 à 3 chromatophores avec pyrénoïde et anneau amylacé. 1500/1.

Fig. 25. Disposition des fils plasmatiques et des noyaux près d'un tampon cellulosique en voie d'accroissement. Les noyaux sont colorés par le carmin. 800/1.

LE RHÉOSTAT À VIS,

PAR

Th. W. ENGELMANN.

Le „rhéostat à vis", dont je vais donner la description, permet, sous un volume très petit et par le simple mouvement d'une vis, de faire varier d'une manière continue, depuis près de zéro jusqu'à des milliers d'ohms, la résistance d'un courant électrique, et de la maintenir constante à toute hauteur intermédiaire.

La construction de ce petit appareil repose sur le fait bien connu qu'un courant, en passant d'une plaque de charbon à une seconde, en contact avec elle, éprouve une résistance qui, entre certaines limites, dépend de la force avec laquelle les deux plaques sont pressées l'une contre l'autre. Lorsque la pression croît, les points de contact deviennent plus nombreux, de sorte que la résistance diminue. La pression est-elle abaissée, le nombre des points de contact se trouve de nouveau réduit, par l'effet de l'élasticité du charbon: la résistance augmente.

Quand la compression ne porte que sur deux de ces plaques de charbon, les variations continues de la résistance sont en général restreintes entre des limites étroites, insuffisantes pour la plupart des recherches; mais, *en augmentant le nombre des plaques*, on peut à volonté élargir ces limites et, en même temps, accroître la précision du réglage.

C'est ainsi, par exemple, que dix petites plaques d'un charbon de pile très bon conducteur, ayant chacune 1 cm. de diamètre et 0,3—0,5 mm d'épaisseur, permettent de faire varier graduellement la résistance depuis moins de 0,1 ohm jusqu'à plus de 20 ohms; avec 50 de ces petites plaques on peut pousser les variations jusque bien au-delà de 200 ohms, et ainsi de suite.

Par l'emploi de charbons *de qualité conductrice différente*, les limites des variations de résistance se laissent encore étendre beaucoup plus. Avec de la poudre de graphite ou de charbon, agglutinée par la gélatine, on peut aisément confectionner soi-même des plaques de toute résistance voulue et parfaitement élastiques, dont un petit nombre suffisent pour élever la limite supérieure jusqu'à des centaines de mille ohms.

Dix plaques d'environ 0.2 mm d'épaisseur et 1 cm de diamètre, qui, fortement serrées par une vis, ont une résistance totale maximum d'à peu près 50 ohms, permettent, par exemple, de faire croître graduellement la résistance jusque bien au-delà de 20000 ohms; dix plaques analogues, mais contenant plus de gélatine, se prêtent à des variations successives comprises entre quelques certaines d'ohms et plusieurs centaines de mille ohms, etc.

En essayant le courant par le téléphone, par la grenouille rhéoscopique ou par le galvanomètre, on reconnaît que les variations de la résistance suivent très régulièrement les variations de la pression, aussi longtemps du moins que les plaques restent serrées avec assez de force pour que leur situation mutuelle ne soit pas sensiblement modifiée par de légers ébranlements. Dans ces conditions, on trouve aussi pour chaque pression déterminée une résistance constante, abstraction faite, bien entendu, de l'influence que l'échauffement dû au courant exerce sur le pouvoir conducteur spécifique, influence à laquelle tous les rhéostats sont soumis.

La disposition particulière du rhéostat à vis dépend en partie de l'usage spécial auquel il est destiné, mais elle reste

toujours très simple. Le même modèle se laisse adapter, au moyen d'un simple changement dans le nombre, les dimensions et la qualité conductrice spécifique des plaques, à des recherches très diverses.

C'est surtout dans le domaine de l'éclairage électrique et dans celui de l'électro-physiologie et de l'électro-pathologie (diagnostic et thérapeutique), que le rhéostat à vis promet de servir utilement.

En ce qui concerne la première de ces applications, il permet, comme *vis à lumière,* d'un emploi aussi simple et aussi commode que celui du robinet dans l'éclairage au gaz, *de faire varier à volonté, entre zéro et le maximum possible, l'intensité lumineuse d'une lampe à incandescence unique ou de plusieurs lampes réunies sur un même fil conducteur.* A cet effet, l'appareil est directement intercalé dans le circuit, en un point quelconque.

Avec les lampes à incandescence de petit calibre (intensité lumineuse de 4 bougies au plus, tension de 2—4 volts), qui suffisent pour la plupart des recherches scientifiques (microscopie, microphotographie, polarisation, spectroscopie, mesures ophtalmométriques, éclairage des croisées de fils des lunettes, étoiles artificielles, etc.), pour les besoins médicaux (laryngoscope, otoscope, ophtalmoscope, etc.), et aussi pour une foule d'usages techniques, le rhéostat du petit modèle I, représenté aux trois quarts environ de la grandeur d'exécution dans la fig. 1, convient parfaitement.

Fig. 1.

Il consiste en un petit tube d'ébonite (ou, éventuellement, de serpentine ou d'ivoire), long d'environ 15 mm., large de 10—12 mm., épais de 3—4 mm., bien poli en dehors et en dedans, et aux deux extrémités duquel est vissé un couvercle en laiton, épais de plusieurs millimètres et pourvu d'une vis de pression. L'un de ces couvercles est traversé à son centre par une vis,

dont le mouvement permet de comprimer un certain nombre (10—20 ou plus) de petits disques d'un charbon de pile homogène et très bon conducteur, épais chacun d'environ $0^{mm},5$ et librement superposés à l'intérieur du tube. Pour empêcher que le charbon ne soit brisé par l'extrémité de la vis, une petite plaque de cuivre ou d'argentan, épaisse d'environ $0^{mm},5$, est interposée entre cette extrémité et le disque supérieur. La petite tige filetée, qu'on voit au bas de l'appareil, sert à le fixer sur la table de travail, sur le support du microscope ou de la lampe, ou sur tel autre objet qu'on le désire.

Lorsqu'on opère avec des tensions un peu élevées (au-delà de 5 volts), qu'on fait usage de petites lampes n'ayant que peu d'ohms de résistance, et que la résistance du reste du circuit est également très faible, il se peut, si le courant reste fermé assez longtemps, que le rhéostat s'échauffe d'une manière sensible [1]. Il est bon, en conséquence, de n'employer que le nombre d'éléments strictement nécessaire pour que la lampe donne son maximum d'effet utile. C'est aussi le plus sûr moyen de prévenir que le filet de charbon de la lampe ne soit consumé. Avec les petites lampes de la construction la plus nouvelle [2], qui suffisent dans presque tous les cas ci-dessus énumérés, on n'a besoin, par exemple, que de deux ou tout au plus trois éléments Bunsen ou Grove de moyenne grandeur, ou bien, de trois ou quatre des petits éléments de Grove dont M. du Bois-Reymond a introduit l'usage dans les recherches physiologiques; il en faut moins encore pour les lampes du plus petit modèle. L'emploi de grands éléments n'est indiqué que lorsque la pile doit alimenter simultanément plusieurs lampes à incandescence branchées sur le même conducteur, et dont on désire pouvoir modifier séparément le degré de lumière. En effet, c'est seulement

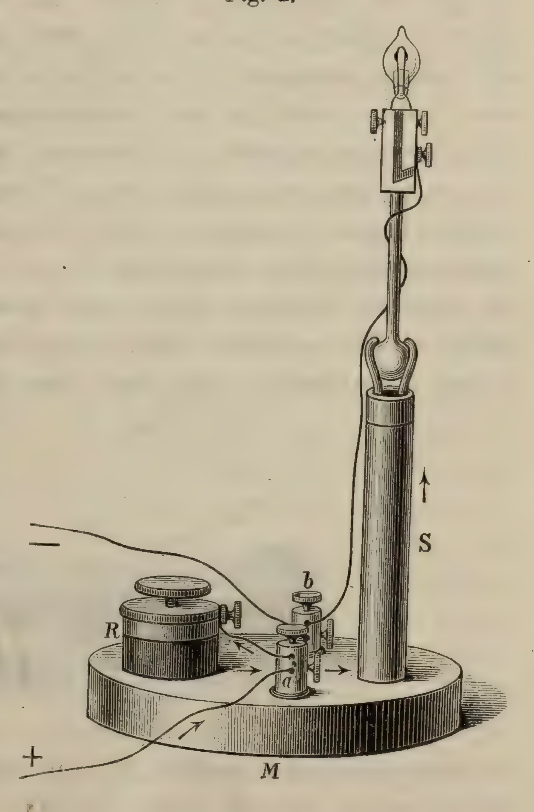
---

1) L'échauffement atteint dans tous les cas son maximum, lorsque la résistance du rhéostat devient égale à celle du reste du circuit.

2) Je les prends chez MM. Greiner et Friedrichs, à Stützerbach.

dans le cas où la résistance du conducteur principal est insensible par rapport à celle des dérivations, que le serrage ou le desserrage de la vis du rhéostat dans l'une des branches n'a pas d'influence appréciable sur l'intensité lumineuse des autres lampes. Il va sans dire que, dans le cas en question, chacune des branches doit posséder son rhéostat propre. Pour trois petites lampes de 4—7 volts, il suffit de trois éléments Grove hauts de 15 cm., larges de 12 cm., et profonds de 2,5 cm., associés en série. Souvent on trouvera avantage à fixer l'appareil sur quelque masse conductrice plus grosse (support de la lampe ou du microscope, etc.). Le mieux est alors de faire entrer le tube lui-même dans cette masse. Une disposition de ce genre, très commode, se voit dans le fig. 2, qui représente, environ aux $\frac{2}{3}$ de la grandeur d'exécution, un *petit support de lampe à incandescence* avec pied en laiton, d'abord construit pour les observations au microscope, mais qui est susceptible d'un emploi très général [1]).

Fig. 2.



Lorsque les lampes à incandescence demandent un courant d'une tension supérieure à 6 volts, il faut dans le

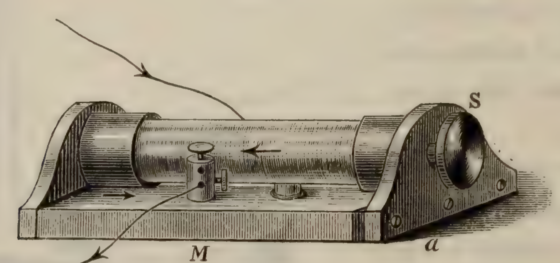
[1]) Entre autres, comme porte-électrodes; ce sont alors, au lieu des fils de la lampe à incandescence, les électrodes qu'on serre à vis dans le bras mobile,

rhéostat un plus grand nombre de disques de charbon, et par conséquent un tube plus long. Pour des lampes de 10 à 12 volts (6--8 bougies), il suffira d'un tube de 50 mm. de longueur et 10—12 mm. de diamètre, contenant 40—50 disques de charbon de pile bon conducteur; pour des lampes de 25—30 volts (10—12 bougies), on aura besoin de 100 de ces disques et le tube devra donc avoir une longueur de 80—100 mm.

Les tubes longs peuvent aussi servir pour les lampes les plus faibles, pourvu qu'on enlève un nombre correspondant de disques de charbon et qu'on les remplace, du côté de la vis, par des cylindres de cuivre. En règle générale, on doit toujours veiller à ce que, *la vis étant bien serrée*, la résistance du rhéostat, comparée à la résistance du reste du circuit, soit assez petite pour que son introduction n'occasionne aucun affaiblissement sensible de l'intensité lumineuse.

Avec des lampes à tension élevée, l'échauffement inévitable du rhéostat exclut l'emploi de tubes d'ébonite. Pour ces cas, je lui donne la disposition du modèle II ou du modèle III (fig. 3 et 4), qui peuvent d'ailleurs servir aussi pour les lampes les plus petites et être construits dans toutes les dimensions voulues. La fig. 3 représente, aux deux tiers de la grandeur réelle,

Fig. 3.



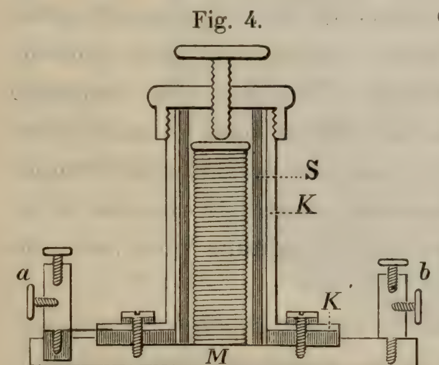
un exemplaire du modèle II, qui suffit pour des tensions allant jusqu'à 25—30 volts. Un tube de serpentine, rempli de disques de charbon, entre librement, à chacune de ces deux extrémités, dans une douille en laiton soudée sur une

solide plaque du même métal. Ces plaques, dont l'une est traversée par la vis *S*, sont fixées à vis aux deux côtés courts de la plaque rectangulaire *M*, également en laiton; mais l'une d'elles seulement est en communication conductrice avec cette plaque et, par son intermédiaire, avec une poupée. L'autre poupée (la postérieure, dans la figure), isolée de *M*, est unie par un court fil métallique à la plaque isolée *a*.

Ce modèle, tout comme le modèle I, peut être employé soit dans la position horizontale soit dans la position verticale; on peut ou bien l'intercaler en un point quelconque du circuit, ou bien le fixer à demeure sur le support de la lampe, sur un porte-lumière, sur la table de travail, etc. Les petites modifications d'ajustement, qui dans ce dernier cas peuvent devenir nécessaires, dépendent des conditions d'emploi spécial et ne sont donc pas de nature à être décrites ici.

Le modèle III est représenté, en coupe, dans la fig. 4. Le tube de serpentine ou de verre *S*, dans lequel sont empilés les disques de charbon, est placé dans l'intérieur du tube de cuivre *K*, et repose librement sur le fond d'une cavité circulaire de la plaque de laiton *M* qui forme le pied de l'appareil. Au moyen de l'anneau de cuivre *K'* soudé à son extrémité inférieure, le tube de cuivre est vissé, avec interposition d'une matière isolante (ébonite p. e.), sur la plaque *M*; une languette de cuivre le met en communication avec la poupée *a*, également isolée de *M*. La poupée *b* est fixée sur la plaque *M* de manière à communiquer avec elle. Sur l'extrémité ouverte du tube *K* est vissé le couvercle en laiton traversé par la vis servant à comprimer les charbons.

Fig. 4.



Pour les usages de l'*électro-physiologie* et de l'*électro-pathologie*, on peut se servir aussi bien du modèle I que des modèles II

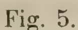
et III, et tous se laissent déjà utiliser dans leurs dimensions les plus réduites. Quant au mode d'emploi du rhéostat, le mieux sera, en général, de l'intercaler directement dans le circuit qui contient le corps humain ou, suivant les cas, l'objet animal ou végétal. En ce qui concerne les disques de charbon, ils devront, à cause de la forte résistance des tissus organiques, être faits d'un charbon peu conducteur. Ainsi que nous l'avons dit plus haut, 10 disques permettent déjà de modifier successivement la résistance depuis quelques centaines d'ohms jusqu'à plusieurs centaines de mille. Par ce moyen on est donc à même, en tout cas, de faire varier l'intensité du courant, d'une manière continue, entre des valeurs qui d'une part restent bien au-dessous de la limite de l'excitation et d'autre part dépassent de beaucoup la hauteur nécessaire pour l'effet maximum.

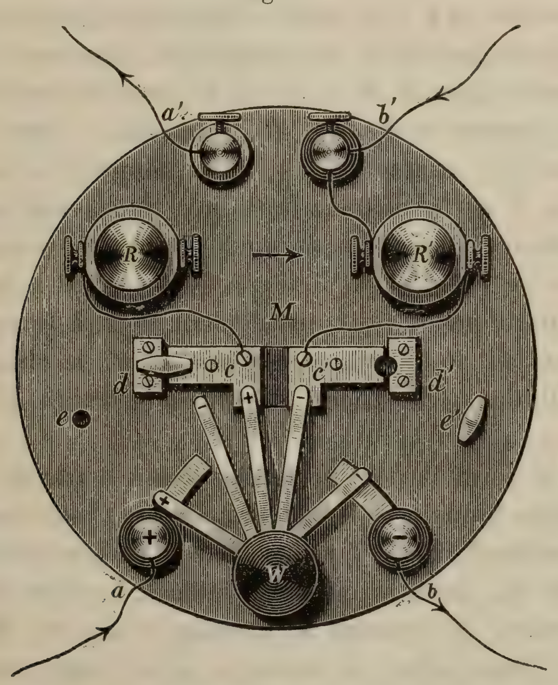
Avec du charbon ordinaire, bon conducteur, on peut obtenir le même résultat en employant le rhéostat à vis comme circuit secondaire, à la manière du rhéocorde de Poggendorff et du Bois-Reymond. Mais il est alors avantageux, pour pouvoir graduer encore plus délicatement l'intensité des courants, notamment celle des courants les plus faibles, et aussi pour éviter l'échauffement quand on emploie des forces électromotrices très considérables, d'intercaler entre le rhéostat et la pile un second rhéostat, à résistance minima plus forte (de 300 ohms, ou plus).

C'est ainsi qu'a été construit le *rhéostat double à commutateur* représenté, aux deux tiers de sa grandeur, dans la fig. 5, appareil qui, sous un très petit volume, remplace un grand rhéocorde de du Bois-Reymond et un banc de résistance du plus fort modèle, et qui en même temps présente un commutateur et une série de dispositions pour intercaler ou exclure différents conducteurs, soit directement, soit en dérivation.

Dans la plaque en laiton M, de forme circulaire, sont engagés deux rhéostats à vis R et R' (Modèle I) ainsi que les quatre poupés a, b, a' et b'. De celles-ci, a' seule est en com-

munication conductrice avec *M*, les autres sont isolées au moyen d'ébonite. Deux lames de cuivre *c* et *c'*, en forme d'équerre, sont également isolées de la plaque *M* sur laquelle elles se trouvent fixées; les petits blocs rectangulaires de cuivre *d* et *d'*, au contraire, communiquent avec *M*, et respectivement aussi avec *c* et *c'* lorsqu'on met en place les bouchons métalliques, qui autrement reposent dans les trous *e* et *e'* de la plaque en laiton. *W* est le commutateur, fixé sur *M*, mais


Fig. 5.



isolé; c'est un axe vertical en ébonite, surmonté d'un bouton et auquel sont attachés deux systèmes, isolés l'un de l'autre, de languettes en argentan, formant ressort. Les languettes marquées du signe + sont réunies entre elles (d'une seule pièce), et il en est de même des languettes marquées du signe —. Les deux courtes languettes latérales + et — glissent sur deux arcs métalliques, isolés de *M*, mais communiquant respectivement avec les poupées *a* (+) et *b* (—); les longues languettes

médianes (+ et chaque fois une —) glissent sur les branches courtes des pièces de cuivre *c* et *c'*. De *c* et *c'* partent des fils de cuivre conduisant respectivement aux couvercles de *R* et de *R'*, et *R'* est en outre réuni par un fil à la poupée *b'*. La poupée *a* est mise en rapport avec le pôle positif de la pile, la poupée *b* avec le pôle négatif; de *a'* et *b'* partent les fils qui se rendent à la préparation ou au corps humain.

Quand les languettes élastiques ont la position indiquée dans la figure, le courant de la pile va de la poupée *a*, par les languettes (+), à la lame métallique *c*, puis, si le bouchon *d* est enlevé, par le fil au rhéostat *R*; traversant celui-ci, il passe dans la plaque *M* et de là se rend, le bouchon *d'* étant retiré, à travers le rhéostat *R'*, à la lame *c'*, pour retourner enfin, par les languettes (—) et la poupée *b*, à la pile. Au moyen de *R* on peut donc introduire dans le circuit principal une résistance aussi forte qu'on le désire. Pour exclure complètement ce rhéostat *R*, il n'y à qu'à mettre le bouchon en *d*; le courant passe alors directement de *c*, à travers *d*, en *M*. De même, si le bouchon est mis en *d'*, le rhéostat *R'* se trouve éliminé, l'électricité s'écoulant alors de *M*, à travers *d'*, vers *c'*.

De *M* le courant peut se rendre aussi, à travers la poupée *a'*, au corps humain (ou à la préparation), puis revenir à la poupée isolée *b'*, d'où il rentre, par le fil conduisant au couvercle de *R'*, dans le circuit principal. Lorsque le bouchon *d'* est retiré, le courant se partage donc, en *M*, en deux branches: l'une allant, à travers *a'* et le corps, vers *b'* et de là au couvercle de *R'*, l'autre arrivant à ce même couvercle en traversant les plaques de charbon de *R'*. Le rhéostat *R'* forme donc la clôture secondaire pour le circuit dérivé vers le corps, de sorte que, dans ce circuit, l'intensité du courant peut être augmentée ou diminuée entre de très larges limites par le mouvement, en arrière ou en avant, de la vis de *R'*. Si cette vis est entièrement desserrée, la communication par *R'* est interrompue, et le courant passe donc exclusivement

à travers le corps. Exclut-on aussi, en mettant le bouchon en *d*, le rhéostat *R* du circuit principal, le courant acquiert, dans le circuit qui traverse le corps, le maximum d'intensité auquel il puisse atteindre. Le minimum absolu — ou même l'interruption complète — s'obtient en introduisant le bouchon *d'*, enlevant le bouchon *d* et desserrant autant que possible la vis *R*.

De la figure il ressort immédiatement que, si l'on tourne le bouton *W* à droite, le sens du courant est interverti dans le circuit d'expérimentation.

Les deux rhéostats peuvent aussi être introduits l'un à la suite de l'autre dans le circuit, qui alors ne subit pas de division; il suffit, pour cela, de retirer les bouchons *d* et *d'*, de supprimer le fil qui joint *c'* à *R'*, et de relier le fil qui se rend au corps, non pas à la poupée *a'*, mais à la lame *c'*; si l'on veut se passer du commutateur, ce fil peut être conduit directement vers la pile.

Si, le bouchon *d* étant en place, on enlève le fil qui joint *R* à *c*, et que, au lieu de faire partir de *a'* l'un des fils qui vont au corps, on rattache ce fil au rhéostat *R*, ce rhéostat se trouve introduit dans le circuit d'expérimentation; et ainsi de suite.

La charge de *R* se compose d'environ 50 disques d'un charbon mauvais conducteur, lesquels permettent de faire varier la résistance, d'une manière continue, entre les limites approximatives de 300 et 300000 ohms; la charge de *R'* consiste en un nombre égal de charbons conduisant bien l'électricité. Le rhéostat *R* donnant déjà le moyen d'affaiblir l'intensité du courant, dans le circuit d'expérimentation, jusqu'au point où ce courant cesse d'agir, il est inutile que la résistance de *R'* puisse diminuer jusqu'à disparition complète, ce qui pourrait être obtenu par l'emploi de charbons conduisant encore mieux, ou de plaques de graphite. Au reste, quand les circonstances le demandent, il est toujours facile de remplacer la charge par une autre, de conductibilité soit plus grande, soit plus petite.

La valeur de la résistance de *R* et de *R'*, dans chaque cas particulier, ne se laisse pas lire sur l'appareil, car il ne serait guère possible, semble-t-il, de donner à celui-ci une graduation restant indéfiniment exacte. Mais cela importe peu, vu qu'en général on a intérêt à connaître, non pas ces valeurs de la résistance, mais les valeurs de l'intensité (plus rigoureusement, de la densité) du courant dans le circuit d'expérimentation. Lorsque des mesures sont nécessaires, il faut donc intercaler un rhéomètre, comme c'est déjà l'usage habituel dans la pratique médicale et comme on devrait le faire aussi dans les recherches physiologiques. Ce rhéomètre — pour les besoins médicaux, celui qui paraît convenir le mieux est un galvanomètre apériodique à ressort, de Kohlrausch — peut être introduit directement dans le circuit contenant la partie vivante, du moins si l'on n'a pas à craindre les effets d'induction qui se produisent dans ses fils au moment de la rupture et de la clôture du circuit. Si cette crainte existe, comme dans plusieurs épreuves diagnostiques (distinction des excitabilités „galvanique" et „faradique") et dans presque toutes les recherches physiologiques relatives à l'action des courants constants sur les nerfs et les muscles, il faut avoir recours à un mécanisme de commutation. Par exemple, les fils venant de *a'* et de *b'* seront reliés aux poupées médianes d'une bascule de Pohl sans croix, dont l'une des paires de poupées latérales sera mise en rapport avec les fils du galvanomètre, l'autre avec les fils venant de la préparation. Il est vrai qu'alors on ne mesure pas l'intensité dans le circuit même de la préparation; mais au moins on mesure celle qui existe dans un autre circuit secondaire du rhéostat *R'*, et celle-ci peut sans erreur sensible être regardée comme directement proportionnelle à l'intensité dans le circuit d'expérimentation, à condition que la résistance de *R'* soit très petite par rapport aux résistances du circuit indivisé, du circuit galvanométrique et du circuit d'expérimentation. Or cette condition est facile à réaliser d'une manière suffisante.

Très fréquemment, d'ailleurs, on n'a besoin d'aucune mesure. Pour mettre en évidence l'inefficacité des variations lentes, positives et négatives, du courant, quelle que soit l'étendue de ces variations; pour démontrer la loi des secousses de Pflüger, pour faire ressortir l'électrotonus de du Bois-Reymond ou celui de Pflüger, dans leur dépendance de l'intensité du courant, il suffit du rhéostat à vis, simple ou double, sans galvanomètre. Il en est encore de même pour la compensation des forces électromotrices, tant qu'il ne s'agit pas de mesurer ces forces.

Notre petit appareil pourra donc, dans un grand nombre des cas, remplacer avantageusement les rhéostats compliqués, encombrants et dispendieux en usage jusqu'ici, et cela d'autant mieux que, sous plus d'un rapport, il les surpasse tous notablement, en ce qui concerne la nature et l'étendue de ses applications.

Tous les modèles décrits dans cette note peuvent être obtenus, très solidement exécutés, chez M. D. Kagenaar, mécanicien de l'Institut physiologique d'Utrecht.

RÈGLE GÉNÉRALE

POUR LA

FORME DE LA TRAJECTOIRE ET LA DURÉE DU MOUVEMENT CENTRAL,

PAR

G. SCHOUTEN.

Introduction.

1. Bien que le nombre des cas où le mouvement central se laisse déterminer d'une manière complète soit relativement petit, vu que ce nombre dépend des progrès faits par la théorie des fonctions, on peut reconnaître à priori la possibilité d'établir les conditions dans lesquelles se produisent les différentes formes de trajectoires.

Le principe des aires et celui de la conservation de l'énergie nous permettent de juger si la trajectoire, lorsqu'elle conduit à l'espace infini, le fait par une branche de nature hyperbolique ou de nature parabolique, ou bien sous la forme d'une spirale; de même, ils nous apprennent si la trajectoire, dans le cas où elle conduit au centre, s'en approche sous la forme d'une spirale à circonvolutions en nombre fini ou en nombre infini.

Il est plus difficile de décider si la trajectoire s'étendra, ou non, jusqu'à l'infini ou jusqu'au centre.

La possibilité d'établir aussi des règles générales pour cette partie de la question m'a été démontrée de la manière suivante.

Si l'on passe en revue les conditions sous lesquelles apparaît

l'une ou l'autre forme de trajectoire dans un mouvement central complètement déterminable, on remarque que dans aucune d'elles ne manque la quantité C, c'est-à-dire le double de l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'unité de temps.

Ensuite, une équation différentielle du mouvement fait voir que l'accélération radiale, c'est-à-dire l'accélération avec laquelle a lieu l'allongement ou le raccourcissement du rayon vecteur, est de même signe que l'expression $C^2 - Fr^3$, où F désigne l'accélération de la force motrice à la distance r du centre.

Ainsi, pour des distances croissantes, la vitesse radiale croîtra ou décroîtra, aussi longtemps que C^2 restera plus grand ou plus petit que Fr^3.

Or, l'annulation de la vitesse radiale indiquant un renversement du sens du mouvement par rapport au centre, on voit qu'il sera possible d'établir une règle générale pour la forme de la trajectoire en résolvant le problème suivant: Le point mobile étant supposé s'avancer, à partir d'un même lieu, dans différentes directions, mais de telle sorte que l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps ait pour toutes les trajectoires une même grandeur, déterminer les différentes formes de trajectoires sur lesquelles le mouvement devra s'accomplir.

J'ai réussi à obtenir une esquisse complète du mouvement dans chacune des hypothèses suivantes: *a.* la force est répulsive; *b.* la force est attractive et Fr^3 est constant; *c.* Fr^3 est une fonction croissante de r; *d.* Fr^3 est une fonction décroissante de r.

Un tableau qui, à l'aide de symboles représentant les types de trajectoires, donne un aperçu des résultats trouvés, conduit dès le premier coup d'œil à présumer que les conditions sous lesquelles les formes de trajectoires apparaissent, se laissent exprimer au moyen de quatre quantités, savoir, *l'énergie totale du point mobile, celle de la force motrice, celle de la force* C^2r^{-3} et *celle du mouvement circulaire.* L'étude ultérieure confirme cette présomption.

Une fois que les résultats trouvés eurent ainsi été amenés sous un même point de vue, il devint facile d'établir une règle générale pour déterminer la forme de la trajectoire.

CHAPITRE I.

Transformation des équations différentielles.

2. Si F est l'accélération de la force motrice, prise positive lorsqu'elle est dirigée vers le centre, et si r et θ désignent les coordonnées polaires du point mobile, les équations différentielles du mouvement sont

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -F\frac{x}{r} \\ y'' &= -F\frac{y}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ représentent les coordonnées rectangulaires du point mobile, et x'', y'' les dérivées secondes de x et y par rapport au temps t.

En multipliant la première des éq. (1) par y, la seconde par x, puis soustrayant les nouvelles équations l'une de l'autre, on a $d(xy' - x'y) = 0$, ou, après intégration et introduction de coordonnées polaires:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

C représentant la constante de l'intégration.

Si la première des éq. (1) est multipliée par $2x'$, et la seconde par $2y'$, la somme de ces nouvelles équations donne

$$d(x'^2 + y'^2) = -F\frac{d(x^2 + y^2)}{r},$$

ou, après intégration et introduction de coordonnées polaires:

$$v^2 = -2\int F\,dr,$$

où v représente la vitesse du point.

De l'équation:

$$r'^2 = v^2 - \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = v^2 - \frac{C^2}{r^2}$$

il suit d'ailleurs:

$$\tfrac{1}{2}\, r'^2 = \int \frac{C^2 - Fr^3}{r^3}\, dr$$

$$r'' = \frac{C^2 - Fr^3}{r^3},$$

et

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{C\,dr}{r\,d\theta}\right)^2 = r^2 v^2 - C^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

L'intégration de cette dernière équation (2) donnera la connaissance complète du mouvement. D'elle dépendent les équations suivantes:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$r'' = \frac{C^2 - Fr^3}{r^3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\tfrac{1}{2}\, v^2 = \tfrac{1}{2}\, v_0^2 - \int_{r_0}^{r} F dr, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\tfrac{1}{2}\, r'^2 = \tfrac{1}{2}\, r'_0{}^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - Fr^3}{r^3}\, dr, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

v_0 représente la vitesse du point, et r'_0 sa vitesse radiale, lorsque le rayon vecteur a une longueur r_0.

3. De l'éq. (3) il suit que, pour $r = \infty$, $r\dfrac{d\theta}{dt}$ est égal à zéro, de sorte que, pour cette valeur $r = \infty$ on a lim. $r'^2 = \text{lim. } v^2$.

En représentant par l la distance du centre à une tangente à la trajectoire, de sorte que $C = l v$, on trouve

$l = 0$	pour	$v = \infty$
$\infty > l > 0$	„	$0 < v < \infty$
$l = \infty$	„	$v = 0$

Si donc, pour $r = \infty$, on a lim. $v = 0$, et par conséquent $l = \infty$, la trajectoire n'a pas d'asymptote, de sorte qu'elle doit être une courbe de nature parabolique ou une spirale d'un nombre infini de circonvolutions.

Si lim. v a une valeur finie pour $r = \infty$, la trajectoire possède une asymptote, qui ne passe pas par le centre.

Si, enfin, on a lim. $v = \infty$ pour $r = \infty$, la trajectoire possède une asymptote passant par le centre.

4. Supposons que, à un certain instant du mouvement qui s'opère sous l'action de la force accélératrice F, on ajoute à l'accélération existante une accélération nouvelle, qui soit en raison inverse du cube de la distance, et que nous représenterons par $\pm \mu r^{-3}$; il suit alors, de l'équation $v^2 = -\int 2 F dr$, que v^2 est augmenté de $\pm \mu r^{-2}$, et par conséquent $r^2 v^2$ de $\pm \mu$, de sorte que les équations du mouvement (2), écrites maintenant sous la forme:

$$\left(r \frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{C\sqrt{1 \mp \frac{\mu}{C^2}}\, dr}{r\, d\theta \sqrt{1 \mp \frac{\mu}{C^2}}}\right)^2 = r^2 v^2 - \left(C\sqrt{1 \mp \frac{\mu}{C^2}}\right)^2$$

mettent en évidence la propriété suivante du mouvement central:

Le changement qu'un mouvement central éprouve, lorsque l'accélération existante est augmentée d'une accélération nouvelle $\pm \mu r^{-3}$, *peut être conçu comme consistant en une rotation du plan de la trajectoire primitive autour du centre, effectuée, à chaque instant, avec une vitesse angulaire égale, en grandeur et en sens, à* $\left(\sqrt{1 \mp \frac{\mu}{C^2}} - 1\right)$ *fois la vitesse angulaire avec laquelle le rayon vecteur tourne dans la trajectoire primitive.*

5. De l'équation (4), il résulte que l'accélération radiale r'' a le même signe que l'expression $C^2 - Fr^3$. En conséquence, nous considérerons le mouvement central dans les hypothèses

suivantes, en représentant Fr^3 par $\varphi(r)$ et $\frac{d\,F r^3}{d\,r}$ par $\varphi'(r)$:

a. La force est *répulsive,* donc $\varphi(r) < 0$;
b. La force est *attractive,* et $\varphi(r)$ constant;
c. La force est *attractive,* et $\varphi'(r) > 0$;
d. La force est *attractive,* et $\varphi'(r) < 0$.

CHAPITRE II.

La force motrice est répulsive.

6. Dans ce cas, l'accélération radiale est constamment positive. L'équation (6) devient

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r'^2_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 + F r^3}{r^3}\, d\,r.$$

Puisque

$$\int_0^{r_0} \frac{C^2 + F r^3}{r^3}\, d\,r > \int_0^{r_0} \frac{C^2\, d\,r}{r^3} = \infty,$$

r' s'annulera nécessairement pour une certaine valeur $r_1 < r_0$ du rayon vecteur. On a alors

$$r'^2 = \int_{r_1}^{r} 2\,\frac{C^2 + F r^3}{r^3}\, d\,r > \int_{r_1}^{r} \frac{2\,C^2}{r^3}\, d\,r = C^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

par conséquent

$$\pm\, C\,d\,t < \frac{r_1\, r\, d\,r}{\sqrt{r^2 - r_1^2}}, \quad d\,\theta = \frac{C\,d\,r}{r^2 r'} < \frac{r_1\, d\,r}{r\sqrt{r^2 - r_1^2}}.$$

En représentant par $T^r_{r_1}$ le laps de temps dans lequel le point arrive de la distance r à la distance minima r_1, et par $\theta^r_{r_1}$ l'angle dont le rayon vecteur tourne pendant cette durée, on a:

$$T^r_{r_1} < \frac{r_1\sqrt{r^2 - r_1^2}}{C}$$

$$\theta^r_{r_1} < 2\,Arc.\,Tg.\sqrt{\frac{r-r_1}{r+r_1}} < \frac{\pi}{2}.$$

Il suit de là que la trajectoire ne passera jamais par le centre; avant que le rayon vecteur n'ait tourné d'un angle droit, elle s'infléchira et s'étendra ensuite vers l'espace infini, par une branche ayant une asymptote.

7. La valeur limite de la vitesse radiale, et par conséquent aussi celle de la vitesse réele, est finie ou infinie en même temps que $\int_{r_1}^{\infty} F\,d\,r$, c'est-à-dire en même temps que le travail exécuté par la force motrice lorsqu'elle porte le point, d'une distance finie, à une distance infinie du centre.

Si ce travail est fini, soit $\int_{r_1}^{\infty} F\,d\,r = A$, l'asymptote de la trajectoire ne passe pas par le centre (§ 3); tel est le cas, par exemple, pour le mouvement produit sous l'action d'une force obéissant à la loi $\mu\,r^{-2}$, mouvement qui s'opère suivant une branche d'hyperbole ne contournant pas le centre d'action, situé au foyer de la branche opposée.

Le temps $T^{\infty}_{r_1}$, que le point met à aller de la distance minima jusqu'à une distance infinie du centre, se déduit de l'équation

$$\pm\,d\,t = \frac{d\,r}{\sqrt{2\int_{r_1}^{r}\frac{C^2+Fr^3}{r^3}\,d\,r}} > \frac{r_1\,r\,dr}{\sqrt{C^2(r^2-r_1^2)+2\,A\,r_1^2 r^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\,A+\frac{C^2}{r_1^2}}}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\,.$$

lorsqu'on pose

$$\frac{C^2\,r_1^2}{C^2+2\,A\,r_1^2} = \alpha^2.$$

Par conséquent:

$$T_{r_1}^{\infty} \sqrt{2A + \frac{C^2}{r_1^2}} > \int_{r_1}^{\infty} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} = \infty.$$

8. Si, au contraire, on a $\int_{r_1}^{\infty} F\,dr = \infty$, la trajectoire possède une asymptote dirigée vers le centre (§ 3); tel est le cas, par exemple, pour le mouvement sous l'influence de la force $F = \mu r$, lequel a lieu suivant une branche d'hyperbole dont le centre coïncide avec le centre d'action.

Le laps de temps dans lequel le point parcourt la trajectoire entière *peut* être fini. En effet, de

$$\pm dt = \frac{r_1\, r\, dr}{\sqrt{C^2 (r^2 - r_1^2) + 2 r^2 r_1^2 \int_{r_1}^{r} F\,dr}}$$

il suit

$$\pm dt < \frac{r_1\, r\, dr}{\sqrt{2 r^2 r_1^2 \int_{r_1}^{r} F\,dr}},$$

par conséquent

$$T_{r_1}^{\infty} < \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{2 \int_{r_1}^{r} F\,dr}},$$

intégrale qui peut avoir une valeur finie.

En posant, par exemple:

$$F = \tfrac{1}{2}(n+1)\,\mu\, r^n,$$

on a

$$\sqrt{\mu}\, T_{r_1}^{\infty} < \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^{n+1} - r_1^{\,n+1}}}.$$

Remplace-t-on maintenant n par $2+\varepsilon$, ε désignant un nombre positif quelconque, on trouve:

$$\sqrt{\mu}\, T_{r_1}^{\infty} < \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\,r}{\sqrt{r^{3+\varepsilon} - r_1^{\,3+\varepsilon}}} < \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\,r}{\sqrt{(r^3 - r_1^{\,3})\, r_1^{\,\varepsilon}}} <$$

$$< r_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\,r}{\sqrt{(r - r_1)\, r^2}} = \pi\, r_1^{-\frac{1+\varepsilon}{2}},$$

de sorte qu'en un temps fini le point arrivera avec une vitesse infinie à une distance infinie, s'il est repoussé avec une force proportionnelle à une puissance de la distance dont l'exposant ne soit pas inférieur à 2.

9. Les résultats obtenus se laissent résumer de la manière suivante:

La trajectoire décrite sous l'action d'une force répulsive est toujours de nature hyperbolique. Le centre, situé sur l'axe, n'est pas contourné par la trajectoire.

Les asymptotes ne passent pas par le centre dans le cas où le travail que la force motrice doit exécuter pour porter le point à une distance infinie du centre, a une valeur finie.

Lorsque, au contraire, ce travail est infiniment grand, les asymptotes passent par le centre et la durée du mouvement peut être finie.

CHAPITRE III.

La force μr^{-3}.

10. D'après l'éq. (4), on a $r'' \lesseqgtr 0$ pour $C^2 - \mu \lesseqgtr 0$.

Dans le cas de $C^2 = \mu$, la vitesse radiale aura une valeur constante et la trajectoire conduira d'un côté jusqu'au centre, de l'autre côté jusqu'à une distance infinie.

La solution complète donne:

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r'_0 r_0}{C}(\theta - \theta_0)}, \qquad t - t_0 = \frac{r - r_0}{r'_0}.$$

Si l'on a $C^2 > \mu$, il suit de l'éq. (6) que la trajectoire s'approchera du centre jusqu'à une distance minima et à partir de là s'étendra jusqu'à l'infini; elle a une asymptote, qui ne passe pas par le centre.

La solution complète donne:

$$r = \frac{r_0}{\cos\theta \sqrt{1 - \frac{\mu}{C^2}}}, \qquad t - t_0 = r_0 \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{C^2 - \mu}}.$$

D'après le § 4, ce mouvement peut être conçu comme un mouvement uniforme suivant une droite qui tourne autour du centre.

Lorsque $C^2 < \mu$, l'éq. (6) donne:

$$r'^2 = r_0'^2 - (\mu - C^2)\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

de sorte qu'il vient $r' = 0$ pour

$$r^2 = \frac{r_0^2}{1 - \frac{r_0^2 r_0'^2}{\mu - C^2}}.$$

tandis que pour $r = 0$ on a la valeur limite $r' = \infty$.

D'un côté, la trajectoire conduira donc toujours au centre; de l'autre côté, elle s'étendra jusqu'à une distance finie et s'y infléchira si $\mu - C^2 > r_0^2 r_0'^2$; mais si $\mu - C^2$ est égal ou inférieur à $r_0^2 r_0'^2$ elle s'éloignera à l'infini, dans le premier cas par une branche en forme de spirale avec un nombre infini de circonvolutions, dans le second cas par une branche de nature hyperbolique.

La solution complète donne:

$$\mu - C^2 > r_0^2 r_0'^2 : r = \frac{2\varrho}{e^{\theta\sqrt{\frac{\mu}{C^2} - 1}} + e^{-\theta\sqrt{\frac{\mu}{C^2} - 1}}},$$

$$\varrho = r_0 \sqrt{\frac{\mu - C^2}{\mu - C^2 - r_0^2 r'^2_0}};$$

$$\mu - C^2 = r_0^2 r'^2_0 : r = r_0 e^{(\theta - \theta_0)\sqrt{\frac{\mu}{C^2} - 1}};$$

$$0 < \mu - C^2 < r_0^2 r'^2_0 : \frac{r + \sqrt{\alpha^2 + r^2}}{r_0 + \sqrt{\alpha^2 + r_0^2}} = e^{\frac{\theta - \theta_0}{\alpha}\sqrt{\frac{\mu}{C^2} - 1}},$$

$$\alpha^2 = \frac{\mu - C^2}{r'^2_0 r_0^2 - (\mu - C^2)} r_0^2$$

CHAPITRE IV.

Le produit de la force par le cube de la distance au centre est une fonction croissante de cette distance.

11. Si Fr^3, fonction que nous représenterons dorénavant par $\varphi(r)$, croît depuis 0 jusqu'à ∞ lorsque r croît de 0 jusqu'à ∞, ce qui est le cas par exemple pour $F = \mu r^{-2}$, l'équation $C^2 - \varphi(r) = 0$ doit avoir une racine réelle, que nous désignerons par r_0.

C'est seulement pour cette valeur du rayon vecteur que le mouvement circulaire uniforme est possible, parce que c'est seulement dans ce cas que l'accélération radiale est égale à zéro.

L'orbite de ce mouvement circulaire uniforme sera représentée par (C, r_0).

12. De l'éq. (4), il suit que l'accélération radiale r'' sera toujours dirigée vers la circonférence de l'orbite circulaire, et que par conséquent la vitesse radiale aura sa valeur la plus grande au moment où le point dépasse cette orbite circulaire.

L'équation (6) donne ici :

$$r'^2 = r'^2_0 - 2\int_r^{r_0} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, d\, r.$$

Puisque, pour $r < r_0$, on a $C^2 - \varphi(r) > 0$, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{r_0} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, d\, r$$

sera infiniment grande, et par conséquent r' devra devenir égal à zéro pour une certaine valeur $r_1 < r_0$.

Il en résulte

$$r'^2 = 2\int_{r_1}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr.$$

La durée $T_{r_1}^{r_0}$, dans laquelle le point arrive de la distance r_0 à la distance minima r_1, se déduit de

$$\pm\, d\, t = \frac{d\, r}{\sqrt{2\int_{r_1}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, d\, r}}.$$

Comme $\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}$ ne devient jamais négatif entre r et r_1, on pourra choisir pour r, entre r et r_1, une valeur ϱ telle qu'on ait:

$$\int_{r_1}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, d\, r = \frac{C^2 - \varphi(\varrho)}{\varrho^3}(r - r_1).$$

On a, par suite,

$$\pm\, d\, t = \frac{d\, r}{\sqrt{2\, \frac{C^2 - \varphi(\varrho)}{\varrho^3}(r - r_1)}},$$

et

$$T_{r_1}^{r_0} = \int_{r_1}^{r_0} dt = \text{fini},$$

$$\theta_{r_1}^{r_0} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{C\,dt}{r^2} = \text{fini}.$$

Il résulte de là que, du côté du centre, la trajectoire se rapprochera de ce centre jusqu'à une distance minima, où elle rebroussera chemin.

13. Pour le mouvement au côté extérieur de l'orbite circulaire, on doit prendre l'équation.

$$r'^2 = r'_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,dr.$$

La vitesse radiale croît à mesure que la distance augmente. Trois cas sont à distinguer, savoir:

$$\tfrac{1}{2}\,r'_0{}^2 \lesseqgtr \int_{r}^{\infty} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,dr,$$

ou, ce qui revient au même:

$$\tfrac{1}{2}\,v_0^2 \lesseqgtr \int_{r_0}^{\infty} F\,dr.$$

Dans le premier cas, on a

$$r'^2 = 2\int_{r}^{r_2} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,dr = 2\,\frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^3}(r_2 - r),$$

d'où il suit:

$$T_{r_0}^{r_2} = \int_{r_0}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2\frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^3}(r_2 - r)}} = \text{fini},$$

$$\theta_{r_0}^{r_2} = \int_{r_0}^{r_2} \frac{C\,dr}{r^2\,r'} = \text{fini}.$$

Au second cas s'applique l'équation

$$r'^2 = 2 \int_r^\infty \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr.$$

Comme $\varphi(r)$ est une fonction croissante de r, nous devons distinguer les deux cas $\varphi(\infty) < \infty$ et $\varphi(\infty) = \infty$ ou $\varphi(\infty) - C^2 =$ fini et $\dfrac{\varphi(r) - C^2}{r^n} =$ fini pour $r = \infty$, n étant > 0. Dans le premier de ces deux cas, on a

$$T_{r_0}^\infty = \int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r'} = \int_{r_0}^\infty \frac{r\,dr}{\sqrt{\varphi(\varrho) - C^2}} = \infty$$

$$\theta_{r_0}^\infty = \int_{r_0}^\infty \frac{C\,dr}{r^2\, r'} = \int_{r_0}^\infty \frac{C\,dr}{r\sqrt{\varphi(\varrho) - C^2}} = \infty.$$

Dans le second cas, on obtient

$$r'^2 = 2 \int_r^\infty \frac{\varphi(r) - C^2}{r^n}\, r^{n-3}\, dr = 2\, \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^n} \int_r^\infty r^{n-3}\, dr;$$

pour que r' soit fini, il faut donc qu'on puisse prendre $n - 3 < -1$; nous posons, en conséquence, $n = +\,\varepsilon$, ε étant un nombere positif plus petit que 2. On a alors

$$r'^2 = 2\, \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^\varepsilon} \cdot \frac{2 - \varepsilon}{r^{2-\varepsilon}}.$$

Il en résulte:

$$T_{r_0}^\infty = \int_{r_0}^\infty \sqrt{\frac{\varrho^\varepsilon}{2\,(2 + \varepsilon)\,(\varphi(\varrho) - C^2)}}\, r^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\, dr = \infty,$$

$$\theta_{r_0}^\infty = \int_{r_0}^\infty \frac{C\,dr}{r^2\, r'} = \text{fini}.$$

Dans le troisième cas, enfin, on a

$$r'^2 = r'^2_\infty + 2 \int_{r_0}^\infty \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr,$$

par conséquent

$$T_{r_0}^{\infty} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{d\,r}{r'} > \int_{r_0}^{\infty} \frac{d\,r}{r'_0} = \infty\,,$$

$$\theta_{r_0}^{\infty} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'} < \int_{r_0}^{\infty} \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'_{\infty}} = \text{fini.}$$

14. Du côté opposé au centre, la trajectoire ne s'étendra donc que jusqu'à une distance finie et s'y infléchira, dans le cas où l'énergie totale du point est moindre que celle de la force motrice. Si ces deux énergies sont égales, la trajectoire ira à l'infini sous la forme d'une spirale avec une infinité de circonvolutions, dans le cas où $\varphi(\infty)$ est fini, ce qui a lieu, par exemple, avec $\varphi(r) = \dfrac{a + b\,r}{a_1 + b_1 r}$ pour $\dfrac{a}{a_1} < C^2 < \dfrac{b}{b_1}$; mais dans le cas de $\varphi(\infty) = \infty$, par conséquent de $\varphi'(\infty) < \infty$, la branche qui s'étend à l'infini sera de nature parabolique. Si, enfin, l'énergie du point est plus grande que celle de la force motrice, la trajectoire aura une branche à asymptote, cette asymptote ne passant pas par le centre.

Dans tous les cas, le mouvement continue indéfiniment.

15. Supposons maintenant que le mouvement circulaire uniforme ne soit pas possible; $C^2 - \varphi(r)$ doit alors être, ou bien toujours positif, ou bien toujours négatif, et par conséquent:

$C^2 - \varphi(\infty) \geqq 0$, comme, avec $\varphi(r) = \dfrac{a+br}{a_1+b_1 r}$, pour $\dfrac{a}{a_1} < \dfrac{b}{b_1} \leqq C^2$,

$C^2 - \varphi(0) \leqq 0$, comme, avec la même loi, pour $C^2 \leqq \dfrac{a}{a_1} < \dfrac{b}{b_1}\cdot$

16. Lorsqu'on a $C^2 \geqq (\infty)$, l'équation (6) donne

$$\tfrac{1}{2}\,r'^2 = \tfrac{1}{2}\,r'^2_0 - \int_r^{r_0} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,d\,r.$$

La valeur de l'intégrale dans le second membre croît d'une manière continue à mesure que r décroît, et pour $r = 0$ elle devient infiniment grande. La trajectoire s'approchera donc

du centre jusqu'à une distance minima r_1, de sorte qu'on a

$$r'^2 = \int_{r_1}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr.$$

L'accélération radiale r' croît à mesure que la distance au centre augmente, et pour $r = \infty$ elle a une valeur finie. Nous trouvons donc:

$$T_{r_1}^{\infty} = \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r'} = \infty$$

$$\Theta_{r_1}^{\infty} = \int_{r_1}^{\infty} \frac{C\,dr}{r^2 r'} = \text{fini}.$$

La trajectoire a par conséquent une branche infinie, avec une asymptote qui ne passe pas par le centre.

17. Lorsque $C^2 \leqq \varphi(0)$, l'équation (6) donne:

$$r'^2 = r'^2_0 + \int_{r}^{r_0} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr.$$

La vitesse radiale croît à mesure que la distance décroît, de sorte que le point atteindra le centre. On a, en outre,

$$T_0^{r_0} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{r'} < \int_0^{r_0} \frac{dr}{r'_0} = \text{fini}.$$

$$\Theta_0^{r_0} = \int_0^{r_0} \frac{C\,dr}{r^2 r'}.$$

Pour savoir si $\Theta_0^{r_0}$ a, ou non, une valeur finie, nous distinguons les cas suivants:

A: $\varphi(r) - C^2 > 0$ pour $r = 0$,

B: $\dfrac{\varphi(r) - C^2}{r} =$ fini pour $r = 0$,

C: $\dfrac{\varphi(r) - C^2}{r^2} =$ » » $r = 0$,

D: $\dfrac{\varphi(r) - C^2}{r^3} =$ » » $r = 0$, etc.

Dan le cas A, on a

$$r'^2 = r'_0{}^2 + \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{r_0{}^2 r^2}(r_0{}^2 - r^2),$$

par conséquent

$$\Theta_0^{r_0} = \int_0^{r_0} \frac{C\,d\,r}{r^2 r'} > \int_0^{r_0} \frac{C\,d\,r}{r\sqrt{r'_0{}^2 r^2 + \varphi(\varrho) - C^2}} = \infty.$$

Dans le cas B, on a

$$r'^2 = r'_0{}^2 + 2\frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho\, r_0\, r}(r_0 - r),$$

par conséquent

$$\Theta_0^{r_0} > \int_0^{r_0} \frac{C\,d\,r}{r\sqrt{r}\sqrt{r'_0{}^2 r + 2\dfrac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho}}} = \infty.$$

Dans le cas C, on a

$$r'^2 = r'_0{}^2 + \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^2}\, l\frac{r_0{}^2}{r^2},$$

par conséquent

$$\Theta_0^{r_0} = \int_0^{r_0} \frac{C\,d\,r}{r\sqrt{r'_0{}^2 r^2 + \dfrac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^2}\, r^2\, l\dfrac{r_0{}^2}{r^2}}},$$

L'expression $\frac{\varphi(\varrho) - C^2}{r'_0{}^2 \varrho^2} r^2\, l\frac{r_0{}^2}{r^2}$ ayant tant pour $r = r_0$ que pour $r = 0$ la valeur zéro, elle doit avoir, pour une valeur intermédiaire ϱ de r, une valeur maxima α^2; par conséquent

$$\Theta_0^{r_0} > \int_0^{r_0} \frac{C\,d\,r}{r\,r'_0\sqrt{r^2 + \alpha^2}} = \infty.$$

Dans le cas D, on a

$$r'^2 = r'_0{}^2 + \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^3}(r_0 - r).$$

r' est donc fini pour $r = 0$. En désignant par r'_c la valeur de r' au centre, on a

$$\Theta_0^{r_0} > \int_0^r \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'_c} = \infty\,.$$

On voit, par cet examen, que la spirale qui conduit au centre possède toujours un nombre infiniment grand de circonvolutions.

Pour le mouvement dans la direction qui s'éloigne du centre, l'équation (6) donne

$$r'^2 = r'_0{}^2 - 2\int_{r_0}^r \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,d\,r,$$

la même relation que celle du § 13, de sorte que nous retrouvons ici les résultats énoncés au § 14.

18. Le mouvement produit sous l'action d'une force attractive dont le prodnit par le cube de la distance au centre est une fonction croissante de cette distance, peut être représenté de la manière suivante:

Si le mouvement circulaire est possible, la trajectoire coupera toujours l'orbite circulaire.

Supposons que le mobile soit lancé d'un point de l'orbite circulaire, d'abord dans une direction perpendiculaire au rayon vecteur, puis dans des directions faisant avec ce rayon vecteur des angles de plus en plus petits.

Si l'angle en question est droit, le mobile décrit l'orbite circulaire.

Si cet angle est rendu peu à peu plus petit, de sorte que la vitesse initiale croisse continuellement, la trajectoire sera une courbe régulièrement ondulée, à rayons vecteurs minima et maxima, tant que l'énergie totale du point mobile reste au-dessous de celle de la force motrice; la première de ces énergies devient-elle égale à la seconde, la trajectoire aura encore une distance minima, mais s'étendra d'ailleurs vers l'espace infini, et cela sous la forme d'une spirale faisant une infinité de circonvolutions, dans le cas où $\varphi(\infty)$ a une valeur finie, ou sous la forme d'une branche parabolique lorsque la valeur de $\varphi(\infty)$ est infinie.

Si, enfin, l'énergie totale du point devient supérieure à celle de

la force motrice, la branche infinie sera de nature hyperbolique.

Lorsque le mouvement circulaire n'est pas possible et qu'on a $C^2 \geqq \varphi(\infty)$, *la trajectoire est toujours de nature hyperbolique.*

A-t-on au contraire $C^2 \leqq \varphi(0)$, *la trajectoire, d'un côté conduira au centre suivant une spirale d'une infinité de spires, et de l'autre côté prendra les formes indiquées ci-dessus dans l'hypothèse de la possibilité du mouvement circulaire.*

19. L'orbite circulaire jouit, comme nous l'avons dit au § 12, de la propriété d'indiquer, par son intersection avec la trajectoire du point, le lieu ou la vitesse radiale a la valeur maximum. Dans le mouvement suivant la loi de Newton, l'éloignement ou le rapprochement, par rapport au centre, est le plus grand lorsque le rayon vecteur du point est perpendiculaire à l'axe de l'orbite. Toutes les orbites ont donc, dans ce cas, des paramètres égaux.

20. Des résultats trouvés il suit encore qu'une légère perturbation du mouvement circulaire donnera lieu à un nouveau mouvement, qui s'exécutera suivant une trajectoire régulièrement ondulée. Dans le cas où la perturbation est très faible, les rayons vecteurs maximum et minimum différeront très peu en longueur, et le mouvement pourra être déterminé de la manière suivante.

Si r_1 est la distance minimum de la trajectoire, $\varphi(r)$ peut être écrit sous la forme

$$\varphi(r) = \varphi(r_1) + (r - r_1)\,\varphi'(r_1 + \vartheta(r - r_1)),$$

ϑ représentant une vraie fraction positive La fonction φ' est ici toujours positive.

On a alors:

$$\int_{r_1}^{r} 2\,F\,d\,r = \int_{r_1}^{r} \frac{2\,\varphi(r)}{r^3}\,dr =$$

$$= \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right)\left\{\varphi(r_1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) + r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\varphi'(r_1 + \vartheta_1(r - r_1))\right\},$$

où ϑ_1 représente une nouvelle fraction proprement dite.

Il en résulte, pour $v^2 = v_1^2 - \int_{r_1}^{r} 2\,F\,d\,r$:

$$v^2 = \frac{C^2}{r_1^2} - \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left\{\varphi\,(r_1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) + r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\varphi'(r_1 + \vartheta_1(r - r_1))\right\},$$

En substituant cette valeur de v^2 dans (2), on a:

$$r^2\,v^2 - C^2 = r^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left\{(C^2 - \varphi\,(r_1))\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) - \right.$$
$$\left. - r_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\varphi'\,(r_1 + \vartheta_1\,(r - r_1))\right\},$$

expression qui, si l'on y pose

$$\frac{r_1\,\varphi'\,(r_1 + \vartheta_1\,(r - r_1)) + (C^2 - \varphi\,(r_1))}{r_1\,\varphi'\,(r_1 + \vartheta_1\,(r - r_1)) - (C^2 - \varphi\,(r_1))} = \varkappa\,,$$

prend la forme

$$r^2 v^2 - C^2 = \{r_1\varphi'(r_1 + \vartheta_1(r - r_1)) + (C^2 - \varphi(r_1))\}\,r^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varkappa r_1}\right).$$

Puisque pour le mouvement circulaire on a $C^2 = \varphi\,(r_0)$, nous pouvons, dans le cas qui nous occupe, poser $C^2 = \varphi\,(r_1)$ $(1 + \varepsilon^2)$, où ε représente une quantite positive très petite, et d'autant plus petite que la perturbation est plus faible. En négligeant tous les termes dans lesquels $(r - r_1)$ et ε entrent au carré ou à une puissance supérieure, on a:

$$r^2\,v^2 - C^2 = \{r_1\,\varphi'\,(r_1) + 2\,\varepsilon\,\varphi\,(r_1)\}\,r^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varkappa\,r_1}\right),$$
$$\varkappa = \frac{r_1\,\varphi'\,(r_1) + 2\,\varepsilon\,\varphi\,(r_1)}{r_1\,\varphi'\,(r_1) - 2\,\varepsilon\,\varphi\,(r_1)}.$$

Les équations différentielles du mouvement, inscrites sous le numéro (2), deviennent dans le cas actuel:

$$\pm\,d\,\theta = \sqrt{\frac{\varphi\,(r_1)\,(1 + \varepsilon)^2}{r_1\,\varphi'\,(r_1) + 2\,\varepsilon\,\varphi\,(r_1)}}\;\frac{d\,r}{r^2\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varkappa\,r_1}\right)}},$$

$$\pm\, d\,t = \sqrt{\frac{1}{r_1\,\varphi'(r_1)+2\,\varepsilon\,\varphi(r_1)}}\;\frac{d\,r}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varkappa\,r_1}\right)}}.$$

L'intégration donne alors pour les équations du mouvement:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,\theta &= \sqrt{\frac{\varphi(r_1)\,(1+\varepsilon)^2}{r_1\,\varphi'(r_1)+2\,\varepsilon\,\varphi(r_1)}}\;Arc.\,Tg.\sqrt{\varkappa\frac{r-r_1}{\varkappa\,r_1-r}},\\ t &= \sqrt{\frac{r_1^{\,2}}{r_1\,\varphi'(r_1)-2\,\varepsilon\,\varphi(r_1)}}\times\\ &\times\left\{(\varkappa+1)\,r_1\,Arc.\,Tg.\sqrt{\frac{r-r_1}{\varkappa\,r_1-r}}-\sqrt{(r-r_1)\,(\varkappa r_1-r)}\right\}\end{aligned}\right\}\;\ldots(7)$$

21. Ces équations font voir que le mouvement a lieu sur une trajectoire régulièrement ondulée, dont les rayons vecteurs minima sont r_1 et les rayons vecteurs mixima $\varkappa\,r_1$. L'angle Θ de chaque paire successive de rayons vecteurs maximum et minimum est représenté par

$$\Theta = \pi\sqrt{\frac{\varphi(r_1)\,(1+\varepsilon)^2}{r_1\,\varphi'(r_1)+2\,\varepsilon\,\varphi(r_1)}},$$

et le temps T, dans lequel le rayon vecteur décrit cet angle, par

$$T = \frac{\tfrac{1}{2}\,\pi\,(\varkappa+1)\,r_1^{\,2}}{\sqrt{r_1\,\varphi'(r_1)-2\,\varepsilon\,\varphi(r_1)}}.$$

Les valeurs limites de ces quantités, pour $\varepsilon = 0$, sont donc

$$\text{lim. } \Theta = \pi\sqrt{\frac{\varphi(r_1)}{r_1\,\varphi'(r_1)}}, \;\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\text{lim } T = \frac{\pi\,r_1^{\,2}}{\sqrt{r_1\,\varphi'(r)}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9$$

22. Lim. Θ sera indépendante de r_1, et par conséquent la même pour tous les mouvements circulaires troublés obéissant à la même loi d'attraction, si $\frac{r\,\varphi'(r)}{\varphi(r)}$ est constant. En dési-

gnant cette valeur constante par α^2, on a:

$$\frac{d\,\varphi(r)}{\varphi(r)} = \frac{\alpha^2\,d\,r}{r},$$

expression qui, intégrée, donne

$$\varphi(r) = \beta\, r^{\alpha^2}. \text{ donc } F = \beta\, r^{\alpha^2 - 3}.$$

Lim. T sera indépendante de r, si $\frac{\varphi'(r)}{r^3}$ a une valeur constante. De

$$\frac{\varphi'(r)}{r^3} = 4\,\alpha^2$$

il résulte

$$\varphi(r) = \alpha^2\, r^4 + \beta, \text{ donc } F = \alpha^2\, r + \beta\, r^{-3}.$$

23. Dans le cas de $F = \mu\, r^n$, les limites deviennent

$$\lim.\,\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{n+3}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\lim.\,T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\,(n+3)\,r^{n-1}}} \ldots\ldots (11)$$

Pour $n = -2$, on a $\lim.\,\Theta = \pi$, $\lim.\,T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\, r^{-3}}}$.

Pour $n = +1$, on a $\lim.\,\Theta = \frac{1}{2}\pi$, $\lim.\,T = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$.

La formule (10) a été trouvée par Newton; elle lui servit à montrer que la force qui pousse les planètes autour du Soleil devait agir en raison inverse du carré de la distance à cet astre, puisque le moindre écart à cette loi entraînerait un déplacement notable du périhélie des orbites.

CHAPITRE V.

Le produit de la force par le cube de la distance au centre est une fonction décroissante de cette distance.

24. Si $\varphi(r)$ parcourt toutes les valeurs possibles depuis ∞ jusqu'à 0 lorsque r croît de 0 à ∞, l'expression $C^2 - \varphi(r)$ aura une racine positive unique r_0. A la distance r_0 seulement, le mouvement circulaire uniforme sera possible, parce que là seulement l'accélération radiale est nulle.

L'équation (4) montre que l'accélération radiale est toujours dirigée dans le sens qui éloigne de la circonférence de l'orbite circulaire (C, r_0), et que la vitesse radiale doit par conséquent devenir plus petite lorsque le point mobile s'approche de cette circonférence.

25. Supposons que le mobile soit lancé d'un point situé à l'intérieur de l'orbite circulaire; on a alors, d'après l'éq. (6),

$$r'^2 = r'^2_1 + \int_r^{r_1} 2\,\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,dr,$$

où r_1 est la distance du point de départ au centre, de sorte que, d'après l'hypothèse faite, on a $r_1 < r_0$.

Comme la valeur de l'intégrale qui fait partie du second membre de cette équation croît lorsque r décroît, et devient infiniment grande pour $r = 0$, le point s'approchera du centre avec une vitesse croissante.

Le temps $T_0^{r_1}$, nécessaire pour que le mobile atteigne le centre, résulte de l'équation

$$T_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{r'} < \int_0^{r_1} \frac{dr}{r'_1} = \text{fini}.$$

L'angle $\Theta_0^{r_1}$, que le rayon vecteur décrit dans ce temps, est donné par

$$\Theta_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'}.$$

Pour juger dans quels cas $\Theta_0^{r_1}$ est ou n'est pas fini, nous remarquerons que $\varphi(r) - C^2$ croît quand r diminue, et peut donc, pour $r = 0$, avoir aussi bien une valeur finie qu'une valeur infinie.

Nous posons donc

$$r^n\,(\varphi(r) - C^2) = \text{fini pour } r = 0,$$

de sorte que pour $n = 0$ se produira le premier cas, pour $n > 0$ le second.

On a alors

$$r'^2 = r_1'^2 + \varrho^n\,(\varphi(\varrho) - C^2) \int_r^{r_1} \frac{2\,d\,r}{r^{n+3}} =$$
$$r_1'^2 + \frac{2\,\varrho^n\,(\varphi(\varrho) - C^2)}{n+2} \left(\frac{1}{r^{n+2}} - \frac{1}{r_1^{n+2}}\right),$$

ce qui transforme la valeur de $\Theta_0^{r_1}$ en

$$\Theta_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{C\,r_1^{\frac{n+2}{2}}\,r^{\frac{n-2}{2}}\,d\,r}{\sqrt{r_1'^2\,r_1^{n+2}\,r^{n+2} + \frac{2\,\varrho^n\,(\varphi(\varrho) - C^2)}{n+2}\,(r_1^{n+2} - r^{n+2})}}.$$

Comme le dénominateur de la fraction sous le signe d'intégration à une valeur finie positive pour toutes les valeurs de r situées entre les limites de l'intégration ou à ces limites mêmes, on voit que

$$\Theta_0^{r_1} = \infty \quad \text{pour } n = 0,$$
$$\Theta_0^{r_1} < \infty \quad \text{,,} \quad n > 0.$$

Le point arrivera donc au centre avec une vitesse infinie, après s'être mu suivant une trajectoire en spirale, qui aura un nombre fini de spires dans le cas de $\varphi(0) = \infty$, un nombre infini dans le cas de $\varphi(0) < \infty$.

26. Pour reconnaître la nature du mouvement dans la direction qui s'éloigne du centre, nous écrirons la valeur de r'^2 sous la forme

$$r'^2 = r_1'^2 - \int_{r_1}^{r} 2\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr.$$

La valeur de l'intégrale, dans cette expression, croît d'une manière continue depuis $r = r_1$ jusqu'à $r = r_0$, puis décroît pour $r > r_0$, parce que $\varphi(r) - C^2$ devient alors négatif.

Nous distinguons donc les trois cas:

$$r_1'^2 \lesseqgtr \int_{r_1}^{r_0} 2\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr.$$

La signification que nous pouvons attacher à ces cas est la suivante: si E est l'énergie totale du point mobile et $E_\varkappa$ celle du mouvement circulaire, on a

$$E_\varkappa - E = \left(\frac{C^2}{2r_0^2} + \int_0^{r_0} F\,dr\right) - \left(\tfrac{1}{2} r_1'^2 + \frac{C^2}{2r_1^2} + \int_0^{r_1} F\,dr\right),$$

ou encore

$$E_\varkappa - E = \int_{r_1}^{r_0} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr - \tfrac{1}{2} r_1'^2,$$

de sorte que les cas en question correspondent à

$$E \lesseqgtr E_\varkappa.$$

27. Dans le premier cas, $E < E_\varkappa$, il vient $r' = 0$ pour une valeur r_2 de r, plus petite que r_0.

On a alors

$$r'^2 = \int_{r}^{r_2} 2\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr = 2\frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^3}(r_2 - r),$$

par conséquent

$$T_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r'} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{\varrho^3}{2(\varphi(\varrho) - C^2)}} \frac{dr}{\sqrt{r_2 - r}} = \text{fini}.$$

Il résulte de là que le point s'approchera de l'orbite circulaire, puis rebroussera chemin avant de l'avoir atteinte.

28. Dans le second cas, $E = E_{\varkappa}$, on a

$$r'^2 = \int_r^{r_0} 2 \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} dr.$$

L'expression $\varphi(r) - C^2$ devenant égale à zéro pour $r = r_0$, nous posons

$$\infty > \frac{\varphi(r) - C^2}{(r_0 - r)^n} > 0 \text{ pour } r = r_0.$$

On trouve alors

$$r'^2 = \int_r^{r_0} 2 \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3 (r_0 - r)^n} (r_0 - r)^n dr = \frac{2}{n+1} \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{\varrho^3 (r_0 - \varrho)^n} (r_0 - r)^{n+1},$$

et par conséquent

$$T_{r_1}^{r_0} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r'} = \int_{r_1}^{r_0} \sqrt{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\varrho^3 (r_0 - \varrho)^n}{\varphi(\varrho) - C^2}} (r_0 - r)^{-\frac{n+1}{2}} dr,$$

d'où résulte

$$T_{r_1}^{r_0} = \infty \text{ pour } n \geqq 1, \text{ donc pour } -\varphi'(r_0) < \infty,$$

$$T_{r_1}^{r_0} < \infty \quad \text{»} \quad n < 1, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad -\varphi'(r_0) = \infty.$$

On a, en outre,

$$\Theta_{r_1}^{r_0} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{C\,dr}{r^2 r'},$$

par conséquent

$$\Theta_{r_1}^{r_0} \overline{\overline{<}} \infty \text{ avec } T_{r_1}^{r} \overline{\overline{<}} \infty.$$

Nous trouvons donc que, dans le cas où l'énergie totale du point mobile est égale à celle du mouvement circulaire, le point, lorsqu'il s'éloigne du centre, s'approche indéfiniment de l'orbite circulaire sans jamais l'atteindre, de sorte que sa trajectoire sera une spirale ayant l'orbite circulaire pour asymptote.

On a supposé, ici, $-\varphi'(r) < \infty$.

Si $-\varphi'(r) = \infty$, le point arrivera sur l'orbite circulaire par un chemin de longueur finie, et puisqu'à cet instant la vitesse radiale et l'accélération radiale seront nulles toutes les deux, le point se trouvera dans la condition du mouvement circulaire uniforme, de sorte qu'à partir de cet instant il se mouvra indéfiniment sur l'orbite circulaire.

29. Dans le troisième cas, $E > E_{\varkappa}$, on a

$$r'_1{}^2 > \int_{r_1}^{r_0} 2\,\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,dr,$$

la vitesse radiale ne devenant maintenant jamais nulle, le point atteindra certainement l'orbite circulaire et aura encore, à cet instant, une certaine valeur r'_0. Nous pouvons alors écrire :

$$r'^2 = r'_0{}^2 + \int_{r_1}^{r_0} 2\,\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} - \int_{r_1}^{r} 2\,\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,dr$$

ou

$$r'^2 = r'_0{}^2 + \int_{r_0}^{r} 2\,\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,dr.$$

Puisque pour $r > r_0$ on a aussi $C^2 > \varphi(r)$, r' croîtra toujours avec r, en conservant une valeur finie jusqu'à $r = \infty$.

Le temps $T_{r_0}^{\infty}$ au bout duquel le point arrive, à partir de la circonférence de l'orbite circulaire, jusqu'à une distance infinie du centre, est donné par l'expression

$$T_{r_0}^{\infty} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{d\,r}{r'} > \int_{r_0}^{\infty} \frac{d\,r}{r'_\infty} = \infty ,$$

où r'_∞ représente la valeur limite de r' pour $r = \infty$.

L'angle $\Theta_{r_0}^{\infty}$, décrit en ce temps par le rayon vecteur, est

$$\Theta_{r_0}^{\infty} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'} < \int_{r_0}^{\infty} \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'} = \text{fini.}$$

La trajectoire du point s'étendra donc à l'infini, sous la forme d'une hyperbole.

30. Supposons maintenant que le mobile soit lancé d'un point situé à la distance $r_1 > r_0$, c'est-à-dire, situé *en dehors* de l'orbite circulaire.

La vitesse radiale est alors, d'après l'équation (6):

$$r'^2 = r'_1{}^2 + \int_{r_1}^{r} 2\,\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,d\,r.$$

On voit que la vitesse radiale croît avec la distance au centre et a, pour $r = \infty$, une valeur finie.

La trajectoire s'étendra donc jusqu'à l'infini, par une branche de nature hyperbolique.

Pour le mouvement dans la direction du centre, on a:

$$r'^2 = r'_1{}^2 - \int_{r}^{r_1} 2\,\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,d\,r.$$

Tant que r reste $> r_0$, la vitesse radiale décroîtra avec r.

De même qu'au § 26, nous devons distinguer trois cas, savoir:

$$E \lesseqgtr E_x.$$

Raisonnant de la même manière qu'aux §§ 27—29, et tenant compte de ce qui a été dit au § 25, on trouve que le point, lorsqu'il se meut dans la direction du centre, se rap-

prochera jusqu'à une certaine distance de l'orbite circulaire puis s'en éloignera, si son énergie totale est moindre que celle du mouvement circulaire. Si les deux énergies sont égales, le point suivra une trajectoire spirale d'une infinité de spires et se rapprochera continuellement de l'orbite circulaire sans jamais l'atteindre, dans le cas où l'on a $-\varphi'(r_0) < \infty$; dans le cas de $-\varphi'(r_0) = \infty$, le point atteindra l'orbite circulaire et continuera indéfiniment à la parcourir.

Si, enfin, l'énergie totale du point est plus grande que celle du mouvement circulaire, le point franchira l'orbite circulaire et arrivera au centre, par une trajectoire spirale, avec une vitesse infinie.

31. Lorsque le mouvement circulaire n'est pas possible, $C^2 - \varphi(r)$ doit être, ou bien constamment positif, ou bien constamment négatif; on doit donc avoir:

$C^2 - \varphi(0) \geqq 0$, comme avec $\varphi(r) = \dfrac{a + b\,r}{a_1 + b_1 r}$, pour $C^2 \geqq \dfrac{a}{a_1} > \dfrac{b}{b_1}$,

$C^2 - \varphi(\infty) \leqq 0$, comme, avec la même loi, pour $C^2 \leqq \dfrac{b}{b_1} < \dfrac{a}{a_1}$.

32. Dans le cas de $C^2 \geqq \varphi(0)$, il suit de l'équation (6):

$$r'^2 = r_1'^2 + \int_{r_1}^{r} 2\,\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,d\,r,$$

de sorte que la vitesse radiale croît avec la distance au centre et pour $r = \infty$ a une valeur finie. Le point s'éloignera donc de plus en plus, suivant une trajectoire de forme hyperbolique.

33. Pour le mouvement dans la direction du centre, on a

$$r'^2 = r_1'^2 - \int_{r}^{r_1} 2\,\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,d\,r.$$

La valeur de l'intégrale, dans le second membre de cette équation, croît à mesure que r décroît, et acquiert certainement une valeur infiniment grande pour $r = 0$, quand on

a $C^2 > \varphi(0)$. Si l'on a $C^2 = \varphi(0)$ et que pour $r = 0$ on pose $\frac{C^2 - \varphi(0)}{r^n} < \infty$, où $n > 0$, il vient

$$\int_0^{r_1} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr = \frac{C^2 - \varphi(\varrho)}{\varrho^n} \int_0^{r_1} r^{n-3}\, dr.$$

La valeur de cette intégrale est infiniment grande pour $n \leqq 2$, mais fini pour $n > 2$.

Nous avons donc à distinguer les trois cas:

$$\tfrac{1}{2} {r'}_1^2 \lesseqqgtr \int_0^{r_1} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr,$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2} {r'}_1^2 \lesseqqgtr -\frac{C^2}{2 r_1^2} - \int_0^{r_1} F\, dr + \int_0^{\infty} \frac{C^2}{r^3}\, dr,$$

ou encore

$$E \lesseqqgtr \int_0^{\infty} \frac{C^2}{r^3}\, dr.$$

34. Si l'on a $E < \int_0^{\infty} \frac{C^2}{r^3}\, dr$, et que, par conséquent, l'énergie totale du point soit plus petite que celle de la force $\frac{C^2}{r^3}$, r' deviendra zéro pour une certaine valeur r_2 de r. On a alors:

$$r'^2 = \int_{r_2}^{r} 2\, \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr = 2\, \frac{C^2 - \varphi(\varrho)}{\varrho^3} (r - r_2),$$

par conséquent

$$T_{r_2}^{r_1} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r'} = \text{fini},$$

$$\Theta_{r_2}^{r_1} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2\, r'} = \text{fini}.$$

Lors de son mouvement vers le centre, le point s'approchera

donc de celui-ci jusqu'à une certaine distance, puis s'en éloignera.

35. Si l'on a $E = \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3} dr$, ce qui, de même que dans le cas précédent, d'après le § 33, exige que $\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^n}$ ait pour $r = 0$ et $n > 2$ une valeur infinie, ou, autrement dit, que $-\varphi''(0) = -\varphi'(0) = 0$, il vient:

$$r'^2 = \int_0^r 2\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3} dr = \int_0^r 2\frac{C^2 - \varphi(r)}{r^{2+2\varepsilon}} r^{2\varepsilon - 1} dr,$$

où ε peut avoir une valeur positive quelconque.

Il en résulte:

$$r'^2 = \frac{C^2 - \varphi(\varrho)}{\varepsilon \varrho^{2+2\varepsilon}} r^{2\varepsilon}.$$

On a, par conséquent,

$$T_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{r'} = \int_0^{r_1} \varrho^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon}{C^2 - \varphi(\varrho)}} r^{-\varepsilon} dr,$$

$$\Theta_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{C dr}{r^2 r'} = \int_0^{r_1} C \varrho^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon}{C^2 - \varphi(\varrho)}} r^{-(2+\varepsilon)} dr,$$

de sorte que $\Theta_0^{r_1}$ est toujours infiniment grand, mais que $T_0^{r_1}$ ne l'est que pour $\varepsilon \geqq 1$, c'est-à-dire, quand on a aussi $\varphi'''(0) = 0$.

36. Si l'on a, enfin, $E > \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3} dr$, r' aura pour $r = 0$ une valeur finie, que nous représenterons par r'_c. On a alors:

$$T_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{r'} < \int_0^{r_1} \frac{dr}{r'_c} = \text{fini};$$

$$\Theta_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{C dr}{r^2 r'} > \int_0^{r_1} \frac{C dr}{r^2 r'_1} = \infty.$$

37. Dans le cas de $C^2 \geqq \varphi(0)$, le mouvement dans la direction qui s'éloigne du centre aura donc lieu suivant une branche de nature hyperbolique.

Dans la direction vers le centre, le point se rapprochera du centre jusqu'à une distance finie, après quoi il s'en éloignera jusqu'à l'infini, si son énergie totale est moindre que celle de la force $\frac{C^2}{r^3}$, ce qui ne peut être le cas que pour $-\varphi'(0) = -\varphi''(0) = 0$. Si les deux énergies sont égales, ce qui n'est également possible que lorsque $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$ sont nuls tous les deux, le point arrivera au centre suivant une trajectoire spirale d'une infinité de spires et avec une vitesse infinement grande, à moins que l'on n'ait en outre $\varphi'''(0) = 0$, cas où le point s'approchera asymptotiquement du centre.

L'énergie du point est-elle, enfin, plus grande que celle de la force $\frac{C^2}{r^3}$, le point arrivera toujours au centre avec une vitesse infinie, en suivant une trajectoire spirale d'un nombre infini de circonvolutions.

38. Dans le cas de $C^2 \leqq \varphi(\infty)$, l'accélération radiale, d'après l'équation (4), est toujours négative, de sorte que, dans la direction du centre, le point se mouvra avec une vitesse radiale de plus en plus grande.

Suivant l'équation (6), on a:

$$r'^2 = r_1'^2 + 2 \int_r^{r_1} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} dr,$$

d'où il résulte d'abord

$$T_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{r'} < \int_0^{r_1} \frac{dr}{r_1'} = \text{fini}.$$

Le point arrivera donc au centre avec une vitesse infiniment grande.

Pour juger si $\Theta_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{C\,dr}{r^2\,r'}$ a une valeur finie ou infinie,

nous supposerons que, pour $r = 0$, la quantité

$$r^n (\varphi(r) - C^2)$$

où $n \gtreqless 0$, soit finie.

L'expression de r'^2 devient alors:

$$r'^2 = r'^2_1 + \int_0^{r_1} 2\, r^n (\varphi(r) - C^2) \frac{d\, r}{r^{n+3}} =$$

$$= r'^2_1 + \frac{2\, \varrho^n (\varphi(\varrho) - C^2)}{n+2} \left(\frac{1}{r^{n+2}} - \frac{1}{r_1^{n+2}} \right).$$

On a, par conséquent,

$$\Theta_0^{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{C\, r_1^{\frac{n+2}{2}}\, r^{\frac{n-2}{2}}\, d\, r}{\sqrt{r'^2_1\, r_1^n \;\; 2\, r^{n+2} + 2\, \varrho^n \frac{\varphi(\varrho) - C^2}{n+2} (r_1^{n+2} - r^{n+2})}}.$$

Le dénominateur de la fraction sous le signe intégral ayant une valeur finie entre les limites de l'intégration et à ces limites mêmes, on aura

$$\Theta_0^{r_1} = \infty \quad \text{pour } n = 0, \text{ donc pour } \varphi(0) < \infty,$$

$$\Theta_0^{r_1} < \infty \quad \text{,,} \quad n > 0, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \varphi(0) = \infty.$$

La trajectoire conduisant au centre est donc une spirale, qui a un nombre infini de circonvolutions pour $\varphi(0) < \infty$, mais un nombre fini pour $\varphi(0) = \infty$.

39. Au mouvement dans la direction qui s'éloigne du centre, correspond la formule

$$r'^2 = r'^2_1 - \int_{r_1}^{r} 2 \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} d\, r.$$

La valeur de l'intégrale, dans le second membre, croît avec r et est finie pour $r = \infty$.

Nous devons donc distinguer les trois cas:

$$\tfrac{1}{2} r'^2_1 \lesseqgtr \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, d\, r,$$

ou, ce qui revient au même:

$$E \lesseqgtr \int_0^\infty F\,d\,r.$$

40. Dans le cas de $E < \int_0^\infty F\,d\,r$, c'est-à-dire, lorsque l'énergie totale du point est moindre que celle de la force motrice, r' devient $= 0$ pour une certaine valeur r_2 de r.

On a alors

$$r'^2 = \int_r^{r_2} 2\,\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,d\,r,$$

par conséquent, $T_{r_1}^{r_2}$ et $\Theta_{r_1}^{r_2}$ sont tous les deux finis.

Le point s'éloignera donc du centre jusqu'à une distance finie, puis s'en rapprochera de nouveau.

41. Si $E = \int_0^\infty F\,d\,r$, on a

$$r'^2 = \int_r^\infty 2\,\frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\,d\,r\,;$$

$T_{r_1}^\infty$ et $\Theta_{r_1}^\infty$ seront tous les deux infiniment grands.

Le point s'éloignera donc de plus en plus du centre, suivant une trajectoire spirale d'un nombre infini de circonvolutions.

42. A-t-on, enfin, $E > \int_0^\infty F\,d\,r$, alors r' décroîtra à mesure que r croît, et aura pour $r = \infty$ une valeur finie r'_∞.

Il en résulte

$$T_{r_1}^\infty = \int_{r_1}^\infty \frac{d\,r}{r'} > \int_{r_1}^\infty \frac{d\,r}{r'_1} = \infty\,,$$

et

$$\Theta_{r_1}^\infty = \int_{r_1}^\infty \frac{C\,d\,r}{r^2\,r'} < \int_{r_1}^\infty \frac{C\,d\,r}{r^2 r'_\infty} = \text{fini}.$$

Le point s'éloigne donc indéfiniment du centre, suivant une trajectoire de nature hyperbolique.

43. D'après ce qui précède, le mouvement sous l'action d'une force attractive dont le produit par le cube de la distance au centre est une fonction décroissante de cette distance, se laisse esquisser comme il suit:

Si le mouvement circulaire est possible et qu'on suppose le point mobile lancé d'un point de l'orbite circulaire, il décrira cette orbite circulaire, dans le cas où la direction du mouvement est perpendiculaire au rayon vecteur; pour toute autre direction initiale du mouvement, la trajectoire s'étendra d'un côté vers l'espace infini, par une branche hyperbolique dont l'asymptote ne passe pas par le centre, et de l'autre côté elle se continuera jusqu'au centre, sous la forme d'une spirale ayant pour $\varphi(0) = \infty$ *un nombre fini, pour* $\varphi(0) < \infty$ *un nombre infini de circonvolutions.*

Lorsque le mobile est lancé d'un point situé à l'intérieur de l'orbite circulaire, d'abord dans une direction faisant un angle droit avec le rayon vecteur de ce point, puis sous des angles de plus en plus petits, le mobile, dans le premier de ces deux cas, se rapprochera immédiatement du centre et l'atteindra en suivant une spirale semblable à celle dont il vient d'être question ci-dessus.

Dans le second cas, où la vitesse du point mobile devient d'abord successivement plus grande, ce point, tant que son énergie totale reste inférieure à celle du mouvement circulaire, n'atteindra jamais l'orbite circulaire, mais, arrivé à une distance finie, il rebroussera chemin, pour se rendre au centre.

L'énergie totale du point devient-elle égale à celle du mouvement circulaire, le point s'approchera indéfiniment de l'orbite circulaire, sans jamais la franchir et sans jamais rebrousser chemin. La trajectoire décrite est une spirale d'un nombre infini de circonvolutions, qui a l'orbite circulaire pour cercle asymptotique extérieur, dans le cas où $-\varphi'(r_0) < \infty$. *Le point n'atteint alors jamais l'orbite circulaire. Mais si* $-\varphi'(r_0) = \infty$, *le point parviendra jusqu'à l'orbite circulaire et continuera à s'y mouvoir avec une vitesse uniforme.*

Enfin, l'énergie totale du point surpasse-t-elle l'énergie du mouvement circulaire, la trajectoire coupera l'orbite circulaire et aura une forme telle qu'il a été dit au début de cette esquisse.

Le mouvement a lieu d'une manière analogue lorsque le point mobile est lancé d'un point extérieur à l'orbite circulaire. Tandis que, d'un côté, la trajectoire s'étendra sous la forme d'une branche hyperbolique vers l'espace infini, de l'autre côté elle s'approchera de l'orbite circulaire et, tant que l'énergie totale du point reste plus petite que celle du mouvement circulaire, s'infléchira avant d'avoir atteint cette orbite. Elle aura l'orbite circulaire pour cercle asymptotique intérieur, si l'énergie totale du point devient égale à celle du mouvement circulaire, à moins qu'on n'ait $-\varphi(r_0) = \infty$, *cas où l'orbite circulaire elle-même fait partie de la trajectoire du point. Enfin, elle coupera l'orbite circulaire et aura la forme décrite au début, dans le cas où l'énergie totale du point surpasse celle du mouvement circulaire.*

Si le mouvement circulaire n'est pas possible et qu'on ait $C^2 \geqq \varphi(0)$, *la trajectoire, d'un côté, s'étendra vers l'infini par une branche hyperbolique; de l'autre côté, elle s'approchera du centre et à une distance finie de ce point, s'infléchira pour s'étendre également vers l'espace infini, aussi longtemps que l'énergie totale du point est moindre que celle de la force* $C^2 r^{-3}$. *Ces deux énergies sont-elles égales, la trajectoire s'étendra sous la forme d'une spirale d'un nombre infini de circonvolutions jusqu'au centre, où le point arrivera avec une vitesse infiniment grande, à moins qu'on n'ait* $-\varphi'''(0) = 0$, *auquel cas le point se rapproche asymptotiquement du centre.*

L'énergie totale du point surpasse-t-elle celle de la force $C^2 r^{-3}$, *le point arrive au centre suivant une spirale d'une infinité de circonvolutions.*

Dans le cas, enfin, où l'on a $C^2 \leqq \varphi(\infty)$, *la trajectoire s'étendra d'un côté jusqu'au centre, sous la forme d'une spirale, à circonvolutions en nombre infini ou fini, suivant que* $\varphi(0)$ *a une valeur fini ou infini.*

De l'autre côté, elle s'étendra jusqu'à une distance finie du centre

et s'y infléchira, si l'énergie totale du point est moindre que celle de la force motrice; ces deux énergies sont-elles égales, la trajectoire conduira par une spirale d'une infinité de circonvolutions vers l'espace infini; l'énergie du point est-elle supérieure à celle de la force, la trajectoire va à l'infini par une branche de nature hyperbolique.

CHAPITRE VI.

Résumé des résultats obtenus.

44. Pour qu'on puisse aisément saisir l'ensemble des résultats trouvés, nous les réunirons en un tableau, où la forme de la trajectoire sera indiquée par des signes faciles à comprendre.

A cet effet, nous introduisons la notation suivante:

${}^{\infty}S_c$ = *spirale* conduisant, par un nombre *infini* de circonvolutions, au *centre;*

${}^{e}S_c$ = *spirale* conduisant, par un nombre *fini* de circonvolutions, au *centre;*

${}^{\infty}S_B$ = *spirale* conduisant asymptotiquement, par un nombre *infini* de circonvolutions, à un *cercle extérieur;*

${}^{e}S_B$ = *spirale* conduisant, par un nombre *fini* de circonvolutions, à un *cercle extérieur;*

${}^{\infty}S_b$ = *spirale* conduisant asymptotiquement, par un nombre *infini* de circonvolutions, à un *cercle intérieur;*

${}^{e}S_b$ = *spirale* conduisant, par un nombre *fini* de circonvolutions, à un *cercle intérieur;*

${}^{\infty}S_{\infty}$ = *spirale* conduisent, par un nombre *infini* de circonvolutions, vers l'espace *infini;*

P = trajectoire à *péricentre*, c'est-à-dire, ayant un point plus rapproché du centre que tous les autres et où la trajectoire s'infléchit;

A = trajectoire à *apocentre*, c'est-à-dire, ayant un point plus éloigné du centre que tous les autres et où la trajectoire s'infléchit;

P_{ar} = trajectoire à branche prolongée à l'infini et sans asymptote, donc de nature *parabolique;*

H^e_y = trajectoire à branche prolongée à l'infini et ayant une asymptote qui ne passe *pas* par le centre, donc de nature *hyperbolique;*

H^o_y = trajectoire à branche de nature hyperbolique, mais dont l'asymptote passe *par* le centre.

Nous ferons en outre usage des signes suivants, dont quelques-uns ont déjà été employés plus haut:

E = énergie totale du point mobile;
E_∞ = énergie totale de la force motrice;
E_o = énergie totale de la force $C^2 r^{-3}$;
E_x = énergie totale du mouvement circulaire.

45. La forme de la trajectoire entière peut maintenant être indiquée au moyen de deux des signes ci-dessus expliqués: l'un pour représenter la forme au voisinage du centre, l'autre faisant connaître la forme que la trajectoire présente du côté de l'espace infini.

C'est ainsi, par exemple, que $P—A$ indiquera une trajectoire régulièrement ondulée; ${}^\infty S_c—H^e_y$ sera une trajectoire qui conduit au centre par une spirale d'un nombre infini de circonvolutions, et qui, d'autre part, s'étend vers l'espace infini par une branche de forme hyperbolique, ayant une asymptote non dirigée vers le centre; etc.

46. Les résultats obtenus se laissent maintenant résumer de la manière suivante:

A. la force est *répulsive* (§ 9):

$$P—H^e_y \text{ pour } \int_r^\infty F\,dr < \infty, \text{ et alors } T^\infty_r = \infty,$$

$$P—H^o_y \quad \text{»} \qquad \text{»} = \text{»}, \text{»} \quad \text{»} \quad T^\infty_r \overline{\overline{<}} \infty.$$

B. la force est *attractive* et $\varphi(r) = \mu$ (§ 10):

$C^2 \leqq \mu$,	$C^2 > \mu$,	
$^{\infty}S_c - A$,		pour $E < E_\infty$,
$^{\infty}S_c - {}^{\infty}S_\infty$,		» $E = E_\infty$,
$^{\infty}S_c - H^e_y$,	$P - H^e_y$,	» $E > E_\infty$.

C. La force est *attractive* et $\varphi'(r) > 0$ (§ 18):

$C^2 \leqq \varphi(0)$	$C^2 \geqq \varphi(\infty)$	
$^{\infty}S_c - A$	, ...	pour $E < E_\infty$,
$\left\{ \begin{array}{l} ^{\infty}S_c - {}^{\infty}S_\infty \text{ pour } \varphi(\infty) < \infty, \\ ^{\infty}S_c - P_{ar} \text{ » } \varphi(\infty) = \infty, \end{array} \right.$	. . . .	» $E = E_\infty$,
$^{\infty}S_c - H^e_y$	, $P - H^e_y$,	» $E > E_\infty$,

$\varphi(0) < C^2 < \varphi(\infty)$	
$P - A$,	pour $E < E_\infty$,
$\left\{ \begin{array}{l} P - {}^{\infty}S_\infty \text{ pour } \varphi(\infty) < \infty \\ P - P_{ar} \text{ » } \varphi(\infty) = \infty \end{array} \right.$,	» $E = E_\infty$,
$P - H^e_y$,	» $E > E_\infty$.

D. la force est *attractive* et $\varphi'(r) < 0$ (§ 43):

C^2 non pas $> \varphi(\infty)$ et $\varphi(0) \leqq \infty$:	$C^2 \geqq \varphi(0)$:
${}^{\overset{e}{\infty}}S_c - A$ pour $E < E_\infty$,	$P - H^e_y$ pour $E < E_0$,
${}^{\overset{e}{\infty}}S_c - {}^{\infty}S_\infty$ » $E = E_\infty$,	$^{\infty}S_c - H^e_y$ (*) » $E = E_0$,
${}^{\overset{e}{\infty}}S_c - H^e_y$ » $E > E_\infty$,	$^{\infty}S_c - H^e_y$ » $E > E_0$.

$\varphi(\infty) < C^2 \; (= \varphi(\varkappa)) < \varphi(0)$ et $\varphi(0) \leqq \infty$:	
${}^{\overset{e}{\infty}}S_c - A$ ou $P - H^e_y$	, pour $E < E_\varkappa$,
$\left\{ \begin{array}{l} {}^{\overset{e}{\infty}}S_c - {}^{\infty}S_B \text{ » } {}^{\infty}S_b - H^e_y \text{ si } -\varphi'(\varkappa) < \infty \\ {}^{\overset{e}{\infty}}S_c - {}^{e}S_B \text{ » } {}^{e}S_b - H^e_y \text{ » } -\varphi'(\varkappa) = \infty \end{array} \right.$	, » $E = E_\varkappa$,

$\overset{e}{\infty}S_c \ — \ H_y^e$, pour $E > E_\varkappa$.

(*) On a ici $T_0^r \overline{\overline{<}} \infty$ pour $-\varphi'''(0) \overline{\overline{>}} 0$.

47. Un coup d'œil jeté sur ces tableaux nous apprend que pour $E < E_\infty$ il apparaît un apocentre, pour $E \overline{\overline{>}} E_\infty$ une branche dirigée vers l'espace infini; ensuite, que $E < E_0$ dénonce un péricentre, $E \overline{\overline{>}} E_0$ une spirale conduisant au centre. Toutefois, le dernier tableau montre que, dans les mêmes circonstances, il peut se produire aussi bien A que H_y et aussi bien P que S_c.

Pour découvrir la cause de cette anomalie et parvenir à une règle générale concernant la forme de la trajectoire, il sera nécessaire que les conditions exprimées en C et $\varphi(r)$ soient exprimées aussi au moyen des différentes quantités E.

Entre ces dernières quantités existent les relations suivantes:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2} r'^2 + \frac{C^2}{2r^2} + \int_0^r F\,dr - \int_0^\infty F\,dr,$$

ou bien:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^\infty \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,dr; \quad \ldots \quad (12)$$

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2} r'^2 + \frac{C^2}{2r^2} + \int_0^r F\,dr - \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3}\,dr,$$

ou bien:

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2} r'^2 - \int_0^r \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,dr; \quad \ldots \quad (13)$$

$$E - E_\varkappa = \tfrac{1}{2} r'^2 + \frac{C^2}{2r^2} + \int_0^r F\,dr - \left(\frac{C^2}{2r_\varkappa^2} + \int_0^\varkappa F\,dr\right),$$

ou bien:

$$E - E_\varkappa = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^{r_\varkappa} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\,dr \quad \ldots \quad (14)$$

En soustrayant (14) de (12), on obtient

$$E_\varkappa - E_\infty = \int_{r_\varkappa}^{\infty} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Enfin, en soustrayant (14) de (13), on a

$$E_\varkappa - E_0 = \int_0^{r_\varkappa} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}\, dr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

48. A l'aide de ces équations, nous trouvons:

A. La force est *répulsive:*

$E - E_\infty > 0$, correspondant à H_y,
$E - E_0 < 0$, „ „ P.

B. La force est *attractive* et $\varphi(r) = \mu$:

pour $C^2 \leqq \mu$ on a $E - E_0 > 0$, correspondant à S_c,
„ $C^2 > \mu$ „ $E - E_0 < 0$, „ „ P.

C. La force est *attractive* et $\varphi'(r) > 0$:

pour $C^2 \leqq \varphi(0)$ on a $E - E_0 > 0$, correspondant à S_c,
„ $C^2 > \varphi(0)$ „ $E - E_0 < 0$, „ „ P.

D. la force est *attractive* et $\varphi'(r) < 0$:

pour $C^2 \leqq \varphi(\infty)$ on a $E - E_0 > 0$, correspondant à S_c,
„ $C_2 \geqq \varphi(0)$ „ „ $E - E_\infty > 0$, „ „ H_y,
„ $\varphi(\infty) < C^2 < \varphi(0)$ „ „ $E - E_0 > 0$, „ „ S_c,
exepté lorsque $E_\varkappa \geqq E > E_0$, auquel cas P ou S_b peut se produire. On a, en outre,

$$E - E_\infty > 0 \text{ pour } r > r_\varkappa$$

correspondant à H_y, mais certainement aussi pour $r < r_\varkappa$, lorsque $r_\varkappa - r$ n'est pas trop grand; et dans ce dernier cas, comme l'indique le tableau, il n'apparaîtra pas de trajectoire H_y, si l'on a $E_\varkappa > E > E_\infty$.

De ce qui vient d'être dit, il ressort donc que la cause de l'exception signalée au § 47 doit être cherchée dans l'énergie $E_\varkappa$ du mouvement circulaire. D'après les équations (15) et (16), $E_\varkappa$ est, pour $\varphi'(r) < 0$, plus grand que E_∞ et que E_0. Le point mobile, bien que son énergie totale soit supérieure à E_0, ne pourra alors arriver jusqu'au centre, tant que cette énergie ne surpasse pas celle du mouvement circulaire et que le point devrait franchir l'orbite circulaire pour pouvoir atteindre le centre.

Bien que son énergie totale soit plus grande que celle de la force motrice, le point mobile ne pourra pas non plus s'éloigner indéfiniment du centre suivant une branche infinie, dans le cas où son énergie ne surpasse pas celle du mouvement circulaire et où l'orbite circulaire se trouve sur son trajet vers l'espace infini.

En d'autres termes: le point ne pourra jamais franchir l'orbite circulaire, si son énergie totale ne surpasse pas celle du mouvement circulaire.

49. Nous pouvons donc établir la règle suivante pour les formes de trajectoires qui apparaissent dans le cas où la loi d'action de la force remplit les conditions posées au § 5.

Dans la direction du centre, la trajectoire aura un péricentre, si l'énergie totale du point mobile est moindre que celle de la force $C^2 r^{-3}$; *si elle est égale ou supérieure à celle-ci, la trajectoire conduira au centre.*

Dans la direction qui s'éloigne du centre, la trajectoire aura un apocentre, si l'énergie totale du point est moindre que celle de la force motrice; si elle est égale ou supérieure à celle-ci, la trajectoire s'étendra jusqu'à l'espace infini.

Dans le cas seulement où le point, sur son trajet vers le centre ou vers l'espace infini, trouve une orbite circulaire pour les points de laquelle on a $\varphi'(r) < 0$, *son énergie totale devra surpasser celle du mouvement circulaire; si elle est plus petite que celle-ci, le point s'approchera de l'orbite circulaire jusqu'à une certaine distance, puis rebroussera chemin; si elle y est égale, le point se*

rapprochera indéfiniment de l'orbite circulaire sans jamais la franchir et sans jamais rebrousser chemin.

CHAPITRE VII.

Règle générale pour la forme de la trajectoire et la durée du mouvement central. Applications à quelques lois d'action particulières.

50. Si la loi d'action de la force est maintenant supposée quelconque, à la condition près que sa fonction ait des valeurs finies pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et ∞, l'expression $F r^3$ ou $\varphi(r)$ devra varier quand r variera de 0 à ∞, et elle pourra passer de l'état positif à l'état négatif, de l'état de fonction croissante à celui de fonction décroissante, ou *vice-versa*; mais, de quelque manière que se produisent ces variations avec la distance, toujours la règle énoncée au § 49 pourra être appliquée.

51. En désignant par F l'accélération à la distance r, et par $\frac{1}{2} C$ l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur, on a donc cette

Règle générale pour la forme de la trajectoire.

Déterminez les racines positives de l'équation $Fr^3 - C^2 = 0$.

Ces racines donnent les seules distances où le mouvement circulaire uniforme soit possible.

Décrivez, dans le plan du mouvement, les orbites circulaires sur lesquelles on a $\dfrac{d\,F r^3}{d\,r} < 0$.

Le point mobile ne pourra franchir aucune de ces orbites circulaires, à moins que son énergie totale ne surpasse celle du mouvement circulaire correspondant. Si elle est égale à celle-ci, le point s'approche de l'orbite circulaire sans jamais la franchir et sane jamais rebrousser chemin; si elle est plus petite, le point rebrousss chemin avant d'avoir atteint l'orbite circulaire.

Lors même que le point, dans la direction vers le centre ou vers l'espace infini, ne trouve aucune orbite circulaire sur son trajet, sa trajectoire ne conduira pas au centre ni à l'espace infini, si son énergie totale est inférieure, dans le premier cas, à celle de la force $C^2 r^{-3}$, *dans le second, à celle de la force motrice.*

52. Aux différentes parties de la trajectoire s'applique ce qui suit.

La spirale qui conduit au centre a un nombre infini de circonvolutions lorsque $F r^3$ *a, pour* $r = 0$, *une valeur finie; si* $F r^3$ *est, pour* $r = 0$, *infiniment grand, la spirale a un nombre fini de circonvolutions.*

Le nombre des circonvolutions de la spirale qui conduit à une orbite circulaire (C, r_0) *est infiniment grand lorsque, pour* $r = r_0$, $\frac{dF}{dr}$ *est fini; mais lorsque, pour* $r = r_0$, $\frac{dF}{dr}$ *est infiniment grand, le nombre de ces circonvolutions est fini et l'orbite circulaire fait partie de la trajectoire du point.*

La branche qui conduit à l'espace infini est de nature hyperbolique, lorsque l'énergie totale du point surpasse celle de la force motrice. Si les deux énergies sont égales, cette branche a la forme d'une spirale d'un nombre infini de circonvolutions dans le cas où, pour $r = \infty$, $F r^3$ *a une valeur finie; mais lorsque, pour* $r = \infty$, $F r^3$ *est infiniment grand, cette branche est de nature parabolique.*

53. Quant à la durée du mouvement, voici ce qu'on en peut dire:

Règle pour la durée du mouvement.

Lorsque la trajectoire est une courbe régulièrement ondulée ou un cercle, le mouvement dure indéfiniment.

Lorsque le mouvement a lieu suivant une branche infinie prolongée vers l'espace infini, sa durée est également infinie; dans le cas seulement où la force est répulsive à des distances surpassant une certaine distance finie, le point PEUT *être arrivé en un temps fini à une distance infiniment grande. A cette distance, sa vitesse est alors infinie.*

Le mouvement vers une orbite circulaire, lorsque celle-ci est un

cercle asymptotique ou fait partie de la trajectoire, a une durée infinie.

Enfin, le mouvement suivant une spirale qui conduit au centre s'achève en un temps fini. Dans le cas seulement où $F r^3$ *a pour* $r = 0$ *la valeur* C^2, *et où les trois premières dérivées de* $F r^3$ *par rapport à* r *ont pour* $r = 0$ *la valeur zéro, la trajectoire se rapprochera asymptotiquement du centre, si l'énergie totale du point est égale à celle de la force* $C^2 r^{-3}$.

En tout cas, la vitesse avec laquelle le point atteint le centre est infiniment grande. Si la trajectoire tend asymptotiquement vers le centre, la valeur limite de la vitesse radiale sera zéro.

54. Avant de passer aux applications, je ferai encore les remarques suivantes.

1°. La règle énoncée au § 51, concernant la forme de la trajectoire, convient pour toutes les valeurs de C, aussi pour $C = 0$, c'est-à-dire pour le *mouvement en ligne droite.* Il est clair que, dans ce cas, les orbites circulaires sont remplacées par les points où, sur la trajectoire rectiligne, la force est nulle; de même, l'énergie totale du mouvement circulaire est remplacée par l'énergie potentielle du mobile en ces points.

2°. Tout couple de racines égales positives de l'équation

$$r v - C = 0,$$

qui rend $r v$ minimum, donne le rayon d'une orbite circulaire dont le point peut se rapprocher asymptotiquement.

Sur une pareille orbite circulaire on a, en effet,

$$r'' = 0$$

et

$$r' = 0.$$

Or,

$$r'' = \frac{d \, \frac{1}{2} r'^2}{d r},$$

de sorte qu'on a non seulement $\frac{1}{2} r'^2 = 0$, mais aussi $\frac{d \, \frac{1}{2} r'^2}{d r} = 0$; par conséquent, $\frac{1}{2} r'^2 = 0$ a deux racines égales sur cette orbite circulaire.

D'après la règle du § 51, on doit avoir $\frac{d\,F r^3}{d\,r} < 0$, ou, à cause de $r'' = \frac{C^2 - F r^3}{r^3}$, $\frac{d\,r''}{d\,r} > 0$: donc, $\frac{1}{2} r'^2$ doit être un *minimum.*

Mais, d'après l'équation (2), on a

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{C^2}{2\,r^2};$$

par conséquent, $\frac{1}{2} v^2 - \frac{C^2}{2\,r^2} = 0$ doit avoir, pour toute orbite circulaire dont le point s'approche asymptotiquement, deux racines égales rendant $\frac{1}{2} v^2 - \frac{C^2}{2\,r^2}$ minimum, ce qui est conforme au théorème énoncé.

55. *Applications.* Soit $F = \mu\, r^n$; on a alors:

$$\varphi(r) = \mu\, r^{n+3},$$
$$\varphi'(r) = \mu\,(n+3)\, r^{n+2},$$

de sorte que dans le cas seulement de $n + 3 < 0$ il existe une orbite circulaire (C, r_0), pour laquelle $C^2 = \mu\, r_0^{\,n+3}$.

On a maintenant:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^\infty \frac{C^2 - \mu\, r^{n+3}}{r^3}\, d\,r = \tfrac{1}{2} v^2 - \int_r^\infty \mu\, r^n\, d\,r,$$

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2} r'^2 - \int_0^r \frac{C^2 - \mu\, r^{n+3}}{r^3}\, d\,r,$$

$$E - E_\varkappa = \tfrac{1}{2} r'^2 + \mu \int_r^{r_0} \frac{r_0^{\,n+3} - r^{n+3}}{r^3}\, d\,r =$$

$$= \tfrac{1}{2} v^2 - \int_r^\infty \mu\, r^n\, d\,r - \frac{n+3}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2} \mu\, r_0^{\,n+1}.$$

Il en résulte

$$E - E_\infty < 0 \text{ pour } n + 1 \geqq 0,$$

tandis que pour

$$n+1<0 \text{ on a } E-E_\infty \lesseqgtr 0, \text{ avec } \tfrac{1}{2}v^2 \lesseqgtr \int_r^\infty \mu\, r^n\, d\, r.$$

Il en résulte aussi

$$\begin{aligned} E-E_0 &< 0 \text{ pour } (n+3)>0 \text{ et} \\ &\phantom{<0} \text{ pour } (n+3)=0 \text{ avec } C^2>\mu, \\ E-E_0 &> 0 \text{ pour } (n+3)<0 \text{ et} \\ & \text{ pour } (n+3)=0 \text{ avec } C^2 \leqq \mu. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$E-E_\varkappa \lesseqgtr 0 \text{ avec } \tfrac{1}{2}v^2 \lesseqgtr \int_r^\infty \mu\, r^n\, d\, r + \frac{n+3}{n+1}\cdot \tfrac{1}{2}\mu\, r_0^{\,n+1}.$$

La régle générale donne donc:

$n \geqq -1 : P - A$,

$-3 < n < -1 : P - A$, pour $\tfrac{1}{2}v^2 < \int_r^\infty \mu r^n\, d\, r$,

pour

$P - {}^\infty S_\infty \;\}\; -2 < n < -1$, " " $=$ " ,

$P - P_{ar} \;\}\; -3 < n \leqq -2$, " " $=$ " ,

$P - H_y^e$, " " $>$ " .

$n = -3$:

${}^\infty S_c - A$ pour $\tfrac{1}{2}v^2 < \int_r^\infty \mu\, r^n\, d\, r$ et $C^2 < \mu$,

${}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$ " " $=$ " " " $<$ " ,

${}^\infty S_c - H_y^e$ " " $>$ " " " $\leqq$ " ,

$P - H_y^e$ " " $>$ " " " $>$ " ,

$n < -3$:

${}^e S_c - A$ et $P - H_y^e$ pour $\tfrac{1}{2}v^2 < \int_r^\infty \mu\, r^n\, d\, r + \frac{n+3}{n+1}\cdot\tfrac{1}{2}\mu r_0^{\,n+1}$,

${}^e S_c - {}^\infty S_B$ " ${}^\infty S_b - H_y^e$ " " $=$ " ,

${}^e S_c - H_y^e$ " " $>$ " .

56. Soit $F = \mu + \nu r^{-3}$, par conséquent $\varphi(r) = \mu r^3 + \nu$, $\varphi'(r) = 3\mu r^2$.

Il n'y à a considérer qu'une seule orbite circulaire (C, r_0), pour laquelle $C^2 = \mu r_0^3 + \nu$ et $\mu < 0$.

On a dans ce cas:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^\infty \frac{C^2 - (\mu r^3 + \nu)}{r^3}\, dr = \tfrac{1}{2} v^2 - \int_r^\infty (\mu + \nu r^{-3}) dr.$$

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2} r'^2 - \int_0^r \frac{C^2 - (\mu r^3 + \nu)}{r^3}\, dr = \tfrac{1}{2} r'^2 + \mu r - \int_0^r \frac{C^2 - \nu}{r^3}\, dr.$$

$$E - E_\varkappa = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^{r_0} \frac{C^2 - (\mu r^3 + \nu)}{r^3}\, dr = \tfrac{1}{2} r'^2 - \int_r^{r_0} \frac{-\mu (r_0^3 - r^3)}{r^3}\, dr.$$

Il en résulte:

Pour $\mu > 0$: $E - E_\infty < 0$,
$E - E_0 < 0$ avec $C^2 > \nu$, $E - E_0 > 0$ avec $C^2 \leqq \nu$.

Pour $\mu < 0$: $E - E_\infty > 0$, $E - E_0 < 0$ avec $C^2 > \nu$,
$E - E_0 \lesseqgtr 0$ avec $\tfrac{1}{2} r'^2 \lesseqgtr -\mu r$ si $C^2 = \nu$, et
$E - E_0 > 0$, lorsque $C^2 - \nu = \mu r_0^3 < 0$;
$E - E_\varkappa \gtreqless 0$ avec $\tfrac{1}{2} r'^2 \gtreqless -\mu (r - r_0)^2 \dfrac{2r + r_0}{2r^2}$.

Suivant la règle, la trajectoire est donc:

Pour $\mu > 0$:
si $C^2 > \nu$: $P - A$,
„ $C^2 \leqq \nu$: $^\infty S_c - A$.

Pour $\mu < 0$:
si $C^2 < \nu$:

$^\infty S_c - A$ ou $P - H_y^0$ avec $\tfrac{1}{2} r'^2 < -\mu (r - r_0)^2 \dfrac{2r + r_0}{2r^2}$,
$^\infty S_c - {}^\infty S_B$ „ $^\infty S_b - H_y^0$ „ „ $=$ „ ,
$^\infty S_c - H_y^0$ „ „ $>$ „ .

si $C^2 = \nu$:

$P - H^0_y$ avec $\frac{1}{2} r'^2 < -\mu r$,

$^\infty S_c - H^0_y$ " $\geqq$ " .

si $C^2 > \nu$:

$P - H^0_y$.

On a ici $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{\nu - C^2}{-\mu}}$.

57. Lorsque $F = \mu + \nu r^{-2}$, on a $\varphi(r) = \mu r^3 + \nu r$, $\varphi'(r) = 3 \mu r^2 + \nu$.

L'équation $\mu r^3 + \nu r - C^2 = 0$, a, tant pour $\mu > 0$ et $\nu > 0$ que pour $\mu < 0$ et $\nu < 0$, deux racines imaginaires; quant à la troisième racine, dans le premier cas elle est positive et rend $\varphi'(r) > 0$, tandis que dans le second cas elle est négative.

Le théorème de Sturm nous apprend ensuite que pour $\mu > 0$ et $\nu < 0$, l'équation ne peut avoir qu'une seule racine positive, qui rend $\varphi'(r) > 0$, tandis que pour $\mu < 0$ et $\nu > 0$ elle possède deux racines positives, dans le cas où $C^4 < \dfrac{4 \nu^3}{-27 \mu}$; la plus grande de ces deux racines rend $\varphi'(r) < 0$.

Nous n'avons donc à considérer qu'une seule orbite circulaire (C, r_0), savoir, lorsque $\mu < 0$, $\nu > 0$ et $C^4 < \dfrac{4 \nu^3}{-27 \mu}$.

On a maintenant:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^\infty \frac{C^2 - (\mu r^3 + \nu r)}{r^3} dr =$$

$$= \tfrac{1}{2} v^2 - \int_r^\infty (\mu + \nu r^{-2}) \, dr,$$

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2} r'^2 - \int_0^r \frac{C^2 - (\mu r^3 + \nu r)}{r^3} dr =$$

$$= \tfrac{1}{2} r'^2 + \mu r - \int_0^r \frac{C^2 - \nu r}{r^3} dr,$$

$$E - E_x = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^{r_0} \frac{C^2 - (\mu r^3 + \nu r)}{r^3} dr =$$

$$= \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{C^2}{2 r_0^3} - \int_r^{r_0} (\mu + \nu r^{-2}) \, dr.$$

Il en résulte:

$$E - E_\infty \lesseqgtr 0 \text{ avec } \mu \gtrless 0,$$
$$E - E_0 < 0,$$
$$E - E_x \lesseqgtr 0 \text{ avec } \tfrac{1}{2} v^2 \lesseqgtr \frac{C^2}{2 r_0^3} + \int_r^{r_0} (\mu + \nu r^{-2}) \, dr.$$

La règle concernant la forme de la trajectoire donnera donc, dans ce cas:

$\mu > 0 : P - A.$

$\mu < 0$ et $\nu < 0$,
$\mu < 0$, $\nu > 0$ et $C^4 \geqq \dfrac{4 \nu^3}{-27 \mu}$ $\Big\}$: $P - H_y^0$.

$\mu < 0$, $\nu > 0$ et $C^4 < \dfrac{4 \nu^3}{-27 \mu}$:

$P - A$ et $P - H_y^0$ pour $\tfrac{1}{2} v^2 < \dfrac{C^2}{2 r_0^2} - \displaystyle\int_r^{r_0} (\mu + \nu r^{-2}) \, dr$,

$P - {}^\infty S_B$ et ${}^\infty S_b - H_y^0$ „ „ $=$ „

$P - H_y^0$ „ „ $>$ „

58. Lorsque $F = \mu + \nu r$, on a $\varphi(r) = \mu r^3 + \nu r^4$ et $\varphi'(r) = 3 \mu r^2 + 4 \nu r^3$.

Le théorème de Sturm, appliqué à l'équation $\nu r^4 + \mu r^3 - C^2 = 0$ nous apprend que c'est seulement pour $\nu < 0$, $\mu > 0$ et $C^2 < \dfrac{(\frac{1}{4} \mu)^4}{(-\frac{1}{3} \nu)^3}$ qu'il existe deux racines positives; la plus grande de celles-ci rend $\varphi'(r) < 0$.

Dans ce cas seul, nous avons donc à considérer l'orbite circulaire (C, r_0).

On a maintenant:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2}\, v^2 - \int_r^\infty (\mu + \nu\, r)\, d\, r\,,$$

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2}\, r'^2 - \int_0^r \left(\frac{C^2}{r^3} - (\mu + \nu\, r)\right) d\, r\,,$$

$$E - E_x = \tfrac{1}{2}\, v^2 - \left(\frac{C^2}{2\, r_0^2} + \int_r^{r_0} (\mu + \nu\, r)\, d\, r\right),$$

de sorte que

$$E - E_\infty \lessgtr 0 \quad \text{avec} \quad \nu \gtrless 0\,,$$

$$E - E_0 < 0\,,$$

$$E - E_x \lesseqqgtr 0 \quad \text{avec} \quad \tfrac{1}{2}\, v^2 \lesseqqgtr \frac{C^2}{2\, r_0^2} + \int_r^{r_0} (\mu + \nu\, r)\, d\, r.$$

Notre règle donne donc:

$\nu > 0 : P - A.$

$\left.\begin{array}{l} \nu < 0 \text{ et } \mu < 0 \\ \nu < 0,\ \mu > 0 \text{ et } C^2 \geqq \dfrac{(\frac{1}{4}\,\mu)^4}{(-\frac{1}{3}\,\nu)^3} \end{array}\right\} : P - H_y^0.$

$\nu < 0,\ \mu > 0$ et $C^2 < \dfrac{(\frac{1}{4}\,\mu)^4}{(-\frac{1}{3}\,\nu)^3}$:

$P - A$ et $P - H_y^0$ pour $\tfrac{1}{2}\, v^2 < \dfrac{C^2}{2\, r_0^2} + \displaystyle\int_r^{r_0} (\mu + \nu\, r)\, d\, r$,

$P - {}^\infty S_B$ et ${}^\infty S_b - H_y^0$ „ „ $=$ „ ,

$P - H_y^0$ „ „ $>$ „ .

59. Lorsque $F = \mu\, r + \nu\, r^{-2}$, le théorème de Sturm apprend que l'équation $\mu\, r^4 + \nu\, r - C^2 = 0$ ne peut avoir deux racines positives que dans le cas de $\mu < 0, \nu > 0$ et $(4\, C)^4 < \dfrac{(3\,\nu)^4}{-3\mu}$, la plus grande de ces racines rend $\varphi'(r) < 0$.

On a maintenant:

$$E - E_\infty = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^\infty \frac{C^2 - \mu r^4 - \nu r}{r^3} dr,$$

$$E - E_0 = \tfrac{1}{2} r'^2 - \int_0^r \frac{C^2 - \mu r^4 - \nu r}{r^3} dr,$$

$$E - E_x = \tfrac{1}{2} r'^2 + \int_r^{r_0} \frac{C^2 - \mu r^4 - \nu r}{r^3} dr =$$

$$= \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{C^2}{2 r_0^2} - \int_r^{r_0} (\mu r - \nu r^{-2}) dr.$$

Il en résulte

$E - E_\infty \lesseqgtr 0$ avec $\mu \gtreqless 0$.

$E - E_0 < 0$,

$E - E_x \lesseqgtr 0$ avec $\tfrac{1}{2} v^2 \lesseqgtr \frac{C^2}{2 r_0^2} + \int_r^{r_0} (\mu r + \nu r^{-2}) dr$.

La règle générale donne donc:

$\mu > 0 : P - A$,

$\mu < 0, \nu < 0$, $\Big\}$

$\mu < 0, \nu > 0, (4C)^4 \geqq \frac{(3\nu)^4}{-3\mu}$ $\Big\}$ $: P - H_y^0$.

$\mu < 0, \nu > 0, (4C)^4 < \frac{(3\nu)^4}{-3\mu}$:

$P - A$ et $P - H_y^0$ pour $\tfrac{1}{2} v^2 < \frac{C^2}{2 r_0^2} + \int_r^{r_0} (\mu r + \nu r^{-2}) dr$,

$P - {}^\infty S_B$ et ${}^\infty S_b - H_y^0$ „ $=$ „

$P - H_y^0$ „ $>$ „

60. Ces quelques applications suffisent à montrer comment, à l'aide du théorème de Sturm, la règle générale permet de déterminer complètement la forme de la trajectoire du mouvement central.

LA METEORITE
DE DJATI-PENGILON (JAVA),

PAR

R. D. M. VERBEEK.

Les pierres météoriques tombées, le 3 octobre 1883, dans deux districts de l'arrondissement de *Ngawi*, résidence Madioen, ont été décrites en détail et figurées, sous le nom, de „*Météorite de Ngawi*", par M. E. H. von Baumhauer [1]).

Le 19 mars 1884, le matin de bonne heure, il tomba de nouveau, dans l'arrondissement de Ngawi, une grosse pierre, au sujet de laquelle le journal indien „*De Locomotief*" publia bientôt quelques lignes, qui furent reproduites par le *Handelsblad* (d'Amsterdam) du 21 mai 1884. M. von Baumhauer, ayant en connaissance de cette nouvelle, supposa que la pierre en question pouvait avoir fait partie de la chute du 3 octobre 1883 [2]).

Plus tard, toutefois, il a été prouvé que cette conjecture manquait de fondement. Si remarquable que soit le fait, à deux reprises, séparées seulement par un intervalle de 5½ mois, des pierres météoriques sont tombées dans le même arrondissement de la même résidence. La chute du 19 mars 1884 a été constatée, en effet, par cinq témoins oculaires, ainsi qu'il résulte d'une enquête minutieuse.

Ces témoins sont les Javanais: Hirodikromo (bèkèl du dessa

---

[1]) E. H. von Baumhauer, *Sur la météorite de Ngawi, tombée, le 3 octobre 1883, dans la partie centrale de l'île de Java* (*Arch. néerl.* T XIX, p. 175. Avec 2 planches).

[2]) Voir l'art. ci-dessus cité, p. 178, Note.

Doekoeh), Troenosemito, Soerodrono (kamitoea de doekoeh Djati-Pengilon), Nojokromo et Nojodrono. Tous, ils déclarent avoir vu tomber un corps lumineux, qui, avec un bruit de tonnerre mêlé de sifflements, arriva jusqu'au sol, où, comme on le reconnut plus tard, il creusa un trou de 3 mètres de profondeur.

Quant à l'heure précise du phénomène, et à la direction dans laquelle le météore se mouvait, les cinq témoins donnent des indications un peu différentes, savoir:

N°. 1,	19 mars 1884,			4 h ½	du matin,		direction	O.—E.
„ 2	„	„	„	4 „ ½	„	„	„	O.—E.
„ 3	„	„	„	4 „	„	„	„	O.—E.
„ 4	„	„	„	4 „	„	„	„	S.O.—N.E.
„ 5	„	„	„	3 „ ½	„	„	„	S.O.—N.E.

Le moment le plus probable est donc celui de 4 h ¼ environ, et la direction la plus probable celle de l'O.S.O. à l'E.N.E.

L'endroit où cette météorite tomba est situé un peu au nord du hameau (doekoeh) Djati-Pengilon. Sur la carte chromolithographique, à l'échelle de 1 : 100,000, du service topographique, ce hameau se trouve sur la rive gauche du Solo, au N.E. du poste Bogo (borne milliaire n°. 33), le long de la grande route postale allant de Soerakarta à Ngawi. Au nord de Djati-Pengilon on voit, sur la carte, le nom du hameau Alastoewa. C'est tout près de cette dernière localité, mais sur la rive gauche de la petite rivière Sondé, que la chute a eu lieu. Djati-Pengilon appartient au district Gendigan, résidence Ngawi. Ce village est éloigné d'environ 16 kilomètres, à peu près dans la direction du nord, des points où étaient tombées les pierres du 3 octobre 1883.

Peu de jours après la chute, savoir le 23 mars 1884, la pierre fut extraite du sol par M. F. Kläring, de Sambirobjong, en la possession duquel elle resta assez longtemps (jusqu'au mois d'octobre 1885). Récemment, elle a été cédée par lui au Gouvernement, et elle se trouve maintenant dans la collection du Service des mines.

Par son aspect extérieur, cette pierre ne donne pas, au premier abord, l'idée d'une météorite, mais celle d'un bloc irrégulier d'andésite à grains fins, recouvert d'une mince croûte brune effritée, tel qu'on en trouve ordinairement dans le lit des rivières ou dans l'argile volcanique rouge. On n'y voit presque rien de la croûte rugueuse, scorifiée, dont, entre autres, la météorite du 3 octobre 1883 montre un si bel exemple. Un examen attentif fait toutefois découvrir çà et là, sur la surface brune, des agglomérations de petits grains noirs, lesquelles ressemblent tout à fait à la croûte scorifiée habituelle. Ces particules sont localisées surtout dans des creux peu profonds, que la surface présente çà et là; mais, du reste, on en trouve aussi sur la surface lisse ordinaire. Leur épaisseur ne dépasse pas ½ millimètre.

A l'exception de ces petites parties noires, la couleur de la surface est le brun terne, couvert en beaucoup de points de taches de rouille, d'un brun rougeâtre; là où la masse, en pénétrant dans le sol, a été usée par le frottement, et dans les points où des éclats ont été récemment détachés au marteau, apparaît la couleur gris bleuâtre ou gris verdâtre de la pierre. A la loupe, on reconnaît sur la cassure fraîche un mélange cristallin de particules minérales vert clair, sans forme cristalline distincte, entre lesquelles brillent des particules punctiformes de fer métallique gris et de fer sulfuré jaune. Çà et là, enfin, sont disséminés des globules ronds ou ovoïdes, ordinairement formés d'un minéral blanc terne ou gris clair. Tous ces détails se laissent d'ailleurs observer beaucoup mieux, à la lumière incidente et à la lumière transmise, dans de minces lamelles microscopiques.

La forme de la pierre est celle d'un parallélipipède très irrégulier, limité par 6 faces, dont 5 assez planes, la 6ième très inégale, et ayant ses arêtes et ses angles partout arrondis.

Le *poids* de la pierre s'élevait primitivement à 166,4 kilogrammes; pour l'étude, on en détacha quelques éclats, pesant ensemble 0^{k},340.

Le *poids spécifique* d'un échantillon de la pierre était de 3,747 à 26° C, d'après la détermination que voulut bien en faire M. H. Onnen, professeur de physique au lycée Guillaume III, à Batavia. Pour chasser l'air inclus dans les fins pores de la matière, celle-ci avait été chauffée dans l'eau à la température de l'ébulition; avant cette opération, alors que la pierre contenait de l'air, on n'avait trouvé que 3,732 pour le poids spécifique.

Lorsque la pierre, plongée dans l'eau, était abandonnée pendant 24 heures sous la cloche de la machine pneumatique, son poids absolu diminuait légèrement, et au bout de 48 heures on constatait une nouvelle petite diminution; l'extraction de l'air au moyen du vide, la pierre étant suspendue dans l'eau, ne donnait donc pas de bons résultats, et cela parce que la pierre contient des éléments qui, lors d'un séjour prolongé dans l'eau, s'y dissolvent peu à peu. Nous n'avons pas réussi à déterminer la nature de ces éléments; le liquide qui avait bouilli au contact de la pierre, et qui avait pris nne teinte d'un jaune très clair, laissait, après évaporation et calcination dans une capsule de platine, un minime résidu, de sorte que la coloration ne peut pas provenir, du moins pas uniquement, de la présence d'une matière organique. La recherche qualitative du fer, de la chaux et de l'acide sulfurique donna un résultat *négatif*, d'où il résulte que la coloration ne saurait être attribuée non plus à du sulfate de fer, formé par l'oxydation de la troïlite.

Le fer métallique étant distribué, dans les météorites lithoïdes, d'une manière très irrégulière, il y avait intérêt à déterminer aussi le poids spécifique de la pierre *entière*, opération qui fut exécutée par M. J. A. Schuurman, ingénieur des mines à Batavia. Une caisse revêtue de zinc, qui avait été construite expressément pour ce dessein et travaillée avec soin, fut remplie d'eau jusqu'à une certaine marque, puis pesée. La caisse ayant alors été vidée, on y introduisit la pierre, on reversa de l'eau jusqu'à la marque et on pesa de nouveau. La différence

de ces deux pesées était le poids de la pierre dans l'eau, et, en soustrayant ce chiffre du poids de la pierre dans l'air (166,4 kilogrames), on avait la perte de poids éprouvée dans l'eau; il ne restait plus qu'à diviser par ce dernier chiffre le poids de la pierre, pour obtenir le poids spécifique. M. Schuurman trouva de cette façon, pour le P. S. de la pierre contenant de l'air, le nombre 3,731, qui s'accorde très bien avec le second des deux résultats ci-dessus cités de M. Onnen, surtout si l'on considère que la détermination du P.S. d'un bloc de cette dimension n'est évidemment susceptible que d'une précision toute relative.

Réduite en poudre ténue, la pierre cède à l'aimant environ 11½ pour cent de fer nickelé métallique, lequel est toutefois souillé de particulés silicatées adhérentes et d'un peu de fer sulfuré inclus ou adhérent, de sorte que le contenu en fer nickelé pur peut être évalué à 10 pour cent.

Les silicates se laissent attaquer en partie par l'acide chlorhydrique concentré, en abandonnant de l'acide silicique, partiellement soluble dans le liquide. Par l'ébullition répétée avec H Cl, suivie chaque fois du traitement du résidu par une forte lessive de potasse pour enlever la silice mise en liberté, on trouva, dans un essai préliminaire sur la poudre débarrassée du fer au moyen de l'aimant, que 54 pour cent de la quantité totale des silicates avaient été dissous, 46 pour cent étant restés inattaqués. Or, l'étude microscopique faisant connaître que la pierre ne renferme que *deux* silicates, savoir l'olivine et un pyroxène rhombique (bronzite), la partie soluble dans l'acide chlorhydrique doit consister en olivine et en fer sulfuré, la partie insoluble en bronzite. D'après cet essai préliminaire, l'échantillon examiné de la météorite serait donc composé de:

Fer nickelé	= 10,0	pour	cent,	
Olivine	= 48,6	„	„	(avec Fe S)
Bronzite	= 41,4	„	„	(avec un peu de chromite).
	100,—			

Toutefois, ce rapport des éléments ne s'applique pas à toutes les parties de la météorite, mais seulement à l'échantillon qui l'a fourni. Ainsi, un fragment détaché au voisinage du précédent, et qui fut l'objet, de la part de M. l'ingénieur des mines J. W. Retgers, d'une analyse chimique détaillée (voir plus loin), possédait, d'après cette analyse, la composition suivante:

Fer nickelé.	= 21,3
Fer sulfuré.	= 5,1
Olivine	= 33,4
Bronzite	= 39,0
Chromite	= 0,1
	98,9

Cette portion contenait donc deux fois autant de fer nickelé que celle dont il a été question ci-dessus: mais les poids spécifiques des éléments permettent d'inférer que la composition *moyenne* de la pierre entière doit se rapprocher plus des premiers rapports que des seconds, et que par conséquent le fragment analysé par M. Retgers possédait, accidentellement, une proportion de fer *anormalement* élevée. Si l'on fixe, en effet, le P. S. du fer nickelé à 7,5, celui de la troïlite à 4,8, celui de l'olivine riche en fer à 3,4, celui de la bronzite à 3,1 et celui de la chromite à 4,5, on trouve pour le P.S. du premier fragment 3,756, pour celui du second 4,238; car:

	P. S.			P. S.	
10,0 ×	7,5 =	75,00	21,3 ×	7,5 =	159,75
[1]) 5,0 ×	4,8 =	24,00	5,1 ×	4,8 =	24,48
43,6 ×	3,4 =	148,24	33,4 ×	3,4 =	113,56
41,4 ×	3,1 =	128,34	39,0 ×	3,1 =	120,90
100,0		375,58	0,1 ×	4,5 =	0,45
			98,9		419,14

Donc P. S. $= \frac{375,58}{100} = 3,756$ Donc P. S. $= \frac{419,14}{98,9} = 4,238$ [2])

[1]) La proportion de Fe S a été supposée égale à 5 °/₀, c'est-à-dire la même que dans l'échantillon de M. Retgers.

[2]) Ce calcul n'est pas exact. Le volume de cent grammes de la premiére

Or, le P. S. de la pierre entière (privée d'air) pouvant être évalué à environ 3,75, il faut nécessairement que la composition *moyenne* soit très voisine de celle du premier des échantillons dont il s'agit, et la proportion moyenne du fer nickelé, dans notre météorite, ne saurait donc différer beaucoup de 10 pour cent.

Examen microscopique.

Pour l'examen microscopique, on tailla différentes lamelles minces, opération qui réussit assez bien, cette météorite étant heureusement beaucoup moins fragile que celle du 3 octobre 1883.

En outre, les éléments de la pierre, séparés autant que possible les uns des autres, furent placés chacun isolément dans du baume de Canada sous des couvre-objets et étudiés ainsi au microscope. Le fer nickelé fut extrait au moyen de l'aimant, la troïlite et le fer chromé furent obtenus par la lévigation du silicate en poudre, et les particules de bronzite restaient après le traitement de cette poudre par l'acide chlorhydrique et par la solution de potasse. L'olivine est donc la seule matière dont les particules ne purent être isolées.

Examinée en plaques minces, à la lumière transmise, cette chondrite se montre formée en majeure partie d'un mélange de grains cristallins d'olivine et de bronzite, tantôt d'un vert

---

composition se calcule à

$$\frac{10,0}{7,5} + \frac{5,0}{4,8} + \frac{43,6}{3,4} + \frac{41,4}{3,1} = 28,553 \text{ cM}^3.$$

d'où

$$\text{poids spécifique} = \frac{100}{28,553} = 3,502.$$

Pour la seconde composition on trouve de même :

$$\text{poids spécifique} = \frac{98,9}{26,327} = 3,756.$$

Note du rédacteur.

très clair, tantôt presque incolores. Entre ces grains se voient, irrégulièrement disséminés, des particules de fer métallique (fer nickelé) et de fer sulfuré jaune (troïlite), un très petit nombre de grains noirs de fer chromé, et quelques globules ronds ou oblongs (chondres), ordinairement formés d'un silicate blanc terne, et assez souvent entourés, complètement ou en partie, de fer métallique et de troïlite. On ne découvre aucune trace de particules feldspathiques.

Notre pierre appartient donc à la section des „*chondrites cristallines*" de M. Brezina, le groupe 26 de sa plus récente classification des météorites [1]).

Les *silicates*. Dans les lamelles que j'ai examinées, l'olivine forme à peu près la moitié des silicates, l'autre moitié consistant en bronzite. Les grains cristallins ne laissent que rarement voir une configuration cristalline distincte; d'ordinaire ils sont serrés les uns contre les autres dans toutes les directions, séparés seulement çà et là par des particules de fer ou de troïlite. Les grains d'olivine sont souvent divisés par des fentes irrégulières perpendicnlaires à l'axe principal et par quelques fentes parallèles à cet axe; la bronzite, au contraire, possède un clivage pinacoïdal très net, de sorte que les cristaux de ce minéral présentent ordinairement sur leur section une multitude de lignes parallèles et sont alors faciles à distinguer de l'olivine. Lorsque, toutefois, les fentes caractéristiques manquent dans l'olivine, ou que la structure fibreuse fait défaut à la bronzite, il devient souvent très difficile de reconnaître auquel des deux minéraux on a affaire. Tous les deux, en effet, sont rhombiques, et en sections minces ils ont à peu près la même couleur savoir le vert extrêmement pâle ou même évanescent; d'ordinaire, seulement. l'olivine est encore un peu plus claire que la bronzite.

L'olivine et la bronzite contiennent, l'une et l'autre, des

1) Dr. A. Brezina, *Die Meteoritensammlung des K.K. mineralogischen Hofkabinetes in Wien am 1 Mai 1885. Jarhbuch der K.K. geol. Reichsanstalt*, XXXV *Band*, 1885, *S.* 151—276.

inclusions, savoir, des pores à air, des grains noirs, de petits lambeaux translucides brun clair ou brun verdâtre, et des inclusions limpides, qui ont l'apparence de particules vitreuses, mais présentent toutefois, en général, de faibles couleurs de polarisation lorsque le cristal ambiant est placé, entre les nicols croisés, dans la position d'obscurcissement. Quelques-unes de ces inclusions ne deviennent visibles que par ce mode d'observation, parce qu'à la lumière ordinaire, à cause de leur limpidité et de leur bord mince, elles ne tranchent pas suffisamment sur le cristal qui les enveloppe.

Les pores aérifères se reconnaissent à leur bord obscur; la plupart sont clairs, quelques-uns colorés en brun, probablement par un pigment brun excessivement fin. Les grains noirs sont toujours opaques et appartiennent sans doute à la chromite, minéral qui apparaît aussi isolément dans notre chondrite. Les petits lambeaux bruns consistent peut-être, pour une partie, en oxyde de fer; une autre partie, de même que les petits lambeaux brun verdâtre, doit probablement être rapportée à un silicate riche en fer, qu'il n'est pas possible de déterminer d'une manière plus précise. Dans l'acide chlorhydrique ces particules se dissoludent presque toutes, car on en trouve peu ou point dans la poudre de bronzite qui reste après le traitement par cet acide. De cette circonstance il peut résulter que l'analyse chimique donne, pour la teneur en fer de l'olivine, un chiffre un peu trop fort.

Les particules limpides, de forme ronde, ovoïde ou complètement irrégulière, qui se trouvent aussi bien dans l'olivine que dans la bronzite, mais surtout dans le premier de ces minéraux, et qui renferment ordinairement un ou plusieurs petits cristaux ou grains noirs (de chromite?), paraissent être les mêmes corps qu'a décrits M. Brezina, p. 192—199 de l'ouvrage ci-dessus cité. Pris par M. Tschermak pour du feldspath, ces corps sont regardés par M. Brezina *soit* comme des particules de verre, *soit* comme des portions de la masse cristalline ambiante, mises dans un état de tension par le

grain de minerai adhérent. A la seconde de ces hypothèses l'auteur paraît accorder le plus de probabilité (voir, *l. c.*, p. 273, l'explication de la planche IV, fig. 13).

Nos inclusions se rencontrant surtout dans l'olivine, nous avons recherché avec soin la présence de la chaux dans la dissolution chlorhydrique des silicates; mais le résultat de cette recherche a été *négatif*. Les inclusions peuvent donc difficilement consister en feldspath, car ce minéral, s'il existait dans la pierre, serait probablement de l'anorthite, ou une autre espèce feldspathique basique, et par conséquent calcifère. Dans la bronzite, au contraire, nous avons trouvé de la chaux; toutefois, la proportion s'en élevait au moins à 3 %, quantité beaucoup trop forte pour pouvoir être attribuée aux inclusions extrêmement petites et relativement peu nombreuses de la bronzite.

La dimension de ces corps est, dans l'olivine, de 0,03 millim.; dans la bronzite, ils ne mesurent le plus souvent que 0,01 millim. Il est à remarquer qu'eux-mêmes renferment ordinairement deux sortes d'inclusions, savoir, des grains d'un minerai noir, consistant peut-être en chromite, et des pores remplis d'air, à bord obscur. Ces derniers n'ont en général qu'un diamètre de 0,001 millim. Du reste, j'ai trouvé aussi quelques inclusions limpides *sans* grain de minerai et sans bulles d'air, ce qui rend improbable, au moins pour les inclusions dépourvues de grains, l'hypothèse de M. Brezina, suivant laquelle les inclusions seraient des portions du cristal enveloppant, maintenues dans un état de tension par les grains noirs de minerai.

On serait très enclin à prendre la plupart de ces inclusions, qui d'ordinaire présentent des contours arrondis, pour des particules vitreuses, si un très grand nombre d'entre elles ne polarisaient distinctement la lumière et n'apparaissaient teintes de couleurs plus ou moins vives lorsque le cristal ambiant est placé, entre les nicols croisés, dans la position d'obscurcissement. Quelques inclusions, à la vérité,

ne montrent pas de couleurs de polarisation particulières et, lors de la rotation entre les nicols croisés, deviennent obscures en même temps que le cristal qui les entoure; mais ce sont là des exceptions, et si l'on veut tenir pour du verre les inclusions polarisantes, on doit se demander pourquoi dans la chondrite les particules vitreuses se trouvent à l'état de tension et polarisent, tandis que tel n'est pas le cas dans les roches éruptives terrestres.

En conséquence, j'estime assez probable qu'une partie au moins des inclusions se rapportent, malgré leurs contours arrondis, à des lamelles de bronzite, et cela parce qu'elles ressemblent beaucoup aux particules de bronzite, excessivement petites, de la pâte. L'olivine, en effet, ne se rencontre qu'en cristaux, grands et petits, déjà reconnaissables à un faible grossissement. La bronzite, au contraire, descend des individus les plus grands, en passant par de plus petits, à des individus très petits, à de véritables agrégats microcristallins, qui çà et là enveloppent les cristaux plus grands de l'olivine et de la bronzite, et jouent alors, comme dans les roches éruptives, le rôle d'une pâte microlithique peu abondante. A un faible grossissement, ces agrégats microcristallins sont d'un blanc trouble; sous une amplification puissante, ils se résolvent en une multitude innombrable de lamelles de bronzite superposées les unes aux autres, claires et à contour irrégulièrement polyédrique ou tout à fait arrondi, auxquelles lamelles s'ajoutent quelques petits lambeaux translucides bruns et quelques grains noirs. La preuve que ces lamelles n'appartiennent pas à l'olivine, mais probablement à la bronzite, résulte de ce que les particules troubles se retrouvent dans la poudre de bronzite qui reste après l'attaque réitérée des silicates par l'acide chlorhydrique bouillant, suivie chaque fois du traitement du résidu par la lessive de potasse. De plus, en ce qui concerne la grandeur, ces lamelles sont reliées, par toutes sortes de stades intermédiaires, aux grands cristaux de bronzite.

Or, quelques-unes des inclusions limpides ci-dessus décrites

de l'olivine et de l'enstatite ont une grande ressemblance de forme avec les plus petites lamelles de bronzite de la pâte, bien que la preuve exacte ne puisse être fournie qu'elles appartiennent réellement à la bronzite. Dans ces inclusions, en outre, je n'ai pu observer distinctement, entre les nicols croisés, les anneaux colorés concentriques dont parle M Brezina, mais seulement une coloration uniforme. Je ne veux rien décider, toutefois, quant à la nature de nos très petites inclusions, me bornant provisoirement à regarder comme assez probable qu'elles consistent pour une partie en verre, pour une autre partie en lamelles cristallines de bronzite.

Les *globules* (chondres) qu'on voit irrégulièrement disséminés dans la météorite sont composés principalement de bronzite, avec un peu de fer nickelé et de troïlite. Je n'ai pu trouver, d'une manière certaine, de l'olivine dans ces globules. Quelques-uns consistent en un petit nombre seulement de cristaux d'enstatitite assez grands, assemblés dans toutes sortes de directions; d'autres, au contraire, contiennent une quantité considérable de cristaux de bronzite plus petits, qui présentent la polarisation en mosaïque; d'autres encore sont formées d'un agrégat microcristallin de particules de bronzite, qui à un faible grossissement possèdent un aspect blanc trouble et à un grossissement fort se résolvent ordinairement en une foule de lamelles claires.

Dans quelques globules et secteurs de forme irrégulière, les fibres de bronzite sont groupées radialement, tandis qu'entre les fibres s'est déposé un pigment brun excessivement fin. Entre et sur les fibres se trouvent en outre un grand nombre de lamelles de bronzite à contours irrégulièrement arrondis ou rectilignes, ce qui est cause que, vu à la loupe ou à un grossissement faible, le globule entier présente un aspect très trouble. Plus le pouvoir amplifiant est élevé, plus la composition de ces globules se révèle distinctement, à condition que la matière soit taillée en lamelles suffisamment minces.

Il n'est pas rare que les globules, dont le diamètre mesure

le plus souvent de 1½ à 2½ millimètres, soient entourés d'une couronne de fer nickelé et de troïlite.

Le *fer nickelé*, outre qu'il forme parfois une enveloppe aux globules, se trouve aussi isolé entre les particules minérales; sa couleur est le gris d'acier, et fréquemment il se présente en petits bâtonnets irréguliers, claviformes, de 1 mm. de longueur sur $0^{mm},15$ d'épaisseur. Sur la face de taille on observe souvent des raies nettes, formées pendant l'usure à la poudre d'émeri. La surface de la météorite est couverte, çà et là, de taches de rouille, brunâtres. Aussi, lorsqu'on veut déterminer la proportion du fer nickelé suivant la méthode de Rammelsberg, savoir, en épuisant la poudre de la météorite par le bichlorure de mercure ($Hg\,Cl_2$), est-on obligé de chauffer préalablement la poudre au rouge dans un courant d'hydrogène (méthode de von Baumhauer), afin de réduire les oxydes de fer et de nickel, qui ne se dissolvent pas dans $Hg\,Cl_2$.

Les *grains de troïlite* sont jaunes ou jaune brunâtre (couleur de tombac), quelquefois irisés de bleu d'acier. Ils ne sont *pas* magnétiques. La plupart des grains mesurent $0^{mm},20$ sur la section. Ils se dissolvent dans l'acide chlorhydrique, en dégageant de l'hydrogène sulfuré.

La *chromite*, enfin, est très parcimonieusement répandue, en grains cristallins noir foncé, complètement opaques; très rarement ces grains laissaient voir une couple de faces cristallines.

Le Gouvernement des Indes néerlandaises a décidé, sur la proposition de l'Ingénieur en chef placé à la tête du Service des mines, qu'une plaque de cette grande pierre serait détachée à la scie puis divisée en petits blocs, destinés à être offerts à un certain nombre de savants et d'institutions scientifiques importantes.

Examen chimique.

Par M. J. W. Retgers, ingénieur des mines.

Pour l'analyse quantitative de la météorite de *Djati-Pengilon* on a suivi en grande partie la méthode indiquée par M. von Baumhauer (*Sur la météorite de Tjabé*, dans *Arch. néerl.*, T. VI, 1871, p. 305—325).

Environ 5 grammes de la météorite finement pulvérisée furent chauffés dans un courant d'hydrogène, pour réduire la rouille qui, à l'air humide, se forme rapidement sur le fer nickelé métallique.

Cette opération eut lieu sur un fourneau d'analyse organique élémentaire, la poudre de météorite étant contenue dans une nacelle de porcelaine, elle-même placée dans un tube de verre de Bohême. On fit passer l'hydrogène d'abord à travers une dissolution d'argent, pour le débarrasser de S et de As, puis à travers de l'acide sulfurique, où il se desséchait. Comme il était possible qu'à la chaleur rouge une partie du soufre du fer sulfuré contenu dans la météorite fût entraînée à l'état de gaz sulfhydrique, l'hydrogène, au sortir du tube, fut conduit à travers une solution d'acétate de plomb; mais aucune trace de Pb S n'apparut dans ce liquide.

La nacelle, qu'on laissa refroidir dans le courant d'hydrogène, fut pesée avec son contenu, puis, celui-ci ayant été versé dans un vase, on prit le poids de la nacelle vide. La différence des deux pesées était de 5,0905 grammes; on était obligé d'opérer sur une quantité de matière aussi considérable, parce qu'elle devait suffire à deux analyses de silicates, ainsi qu'à une analyse du fer nickelé.

Von Baumhauer renonce entièrement à déterminer le rapport mutuel des trois éléments principaux de la météorite (fer nickelé, olivine et bronzite), et il fait de chacun de ces éléments une analyse quantitative particulière. Cela a l'inconvénient, toutefois, qu'on doit exécuter deux fois la réduction dans le courant d'hydrogène et le traitement par $HgCl_2$.

Pour cette raison, j'ai suivi une voie un peu différente: sur la quantité totale de 5,0905 grammes, j'ai fait à la fois la détermination quantitative des minéraux constituants et l'analyse séparée de chacun d'eux. La proportion des éléments paraissant d'ailleurs varier beaucoup dans cette météorite, il va sans dire que le résultat de l'analyse ne s'applique qu'à la portion de poudre sur laquelle j'ai opéré.

La poudre réduite fut soumise à l'action prolongée d'une solution chaude de bichlorure de mercure ($Hg\,Cl_2$). Ce traitement eut lieu dans une atmosphère d'hydrogène, afin d'empêcher, comme le remarque von Baumhauer, la formation de chlorure ferrique basique. Finalement, le résidu insoluble fut lavé à l'eau.

I. *Analyse de la solution.*

De la solution, additionnée d'un peu d'acide chlorhydrique, on commença par éliminer le mercure au moyen de H_2S [1]). Ensuite, le liquide fut oxydé par HNO_3, puis divisé en deux portions.

Dans *l'une de ces portions* on effectua la séparation du Fe et du Ni, suivant la méthode indiquée par von Baumhauer, c'est-à-dire, en précipitant Fe_2O_3 par NH_3 et redissolvant dans HCl le précipité $Fe_2H_6O_6$ recueilli sur le filtre, et en répétant ces opérations jusqu'à ce que la liqueur filtrée ne se colorât plus en brun par l'addition du sulfhydrate d'ammoniaque, ce qui, dans le cas présent, eut lieu à la quatrième reprise.

Dans *l'autre portion*, le fer fut précipité à l'état d'acétate

1) Le $Hg\,S$ formé fut, après dessiccation, volatilisé dans un creuset de porcelaine. Il resta un faible résidu de Fe_2O_3, qui fut dissous dans l'eau régale. Cette dissolution, traitée par un excès de NH_3, ne montra aucune trace de coloration en bleu, d'où il suit que le fer nickelé était absolument exempt de cuivre; un contenu éventuel de Cu aurait, en effet, eté dissous par $Hg\,Cl_2$, puis précipité par H_2S, en même temps que $Hg\,S$.

Le petite quantité de dissolution de Fe_2Cl_6 fut ajoutée au reste de la dissolution ferrique.

ferrique basique, puis calciné et pesé. Pour savoir jusqu'à quel point le Fe_2O_3 obtenu était pur, il fut dissous dans HCl concentré, puis la dissolution fut précipitée par NH_3. La liqueur filtrée donna, avec le sulfhydrate d'ammoniaque, encore un fort précipité de NiS. Il fallut répéter trois fois l'opération avant d'avoir une dissolution exempte de Ni. Le résultat apprit que le Fe_2O_3 primitif, obtenu par la précipitation comme acétate basique, contenait encore 12 pour cent de la quantité totale du Ni; c'est donc avec raison que cette séparation est dite très peu satisfaisante par von Baumhauer (*Sur la séparation quantitative du fer d'avec le nickel et le cobalt*, dans *Arch. néerl.*, T. VI, 1881, p. 41—48).

Pour éviter l'évaporation de la grande quantité de liqueur ammoniacale provenant des précipitatious réitérées, le nickel et le cobalt furent précipités par H_2S. Cela vaut mieux que de précipiter par le sulfhydrate d'ammoniaque, parce que dans ce dernier cas on obtient le phénomène connu, à savoir que NiS reste en dissolution dans la liqueur ammoniacale, laquelle dissolution brune ne se laisse que très difficilement décomposer par ébullition. En faisant, au contraire, traverser la liqueur par un courant de H_2S, on sature exactement la totalité de NH_3, et tout le nickel se précipite.

Le précipité de NiS et CoS fut dissous dans l'eau régale, puis les deux métaux furent précipités par la potasse et pesés comme NiO + CoO.

Pour doser la faible quantité de Co, celui-ci fut séparé, de la manière ordinaire, par KNO_2.

II. *Analyse du résidu.*

Le résidu non dissous dans HgCl, et composé des deux silicates, de troïlite et de chromite, ne pouvait être pesé comme tel, vu qu'il était mêlé d'une assez grande quantité de mercure métallique. L'élimination de celui-ci présente des difficultés; calcine-t-on la poudre au contact de l'air, le fer sul-

furé s'oxyde, et si on la calcine dans un courant d'hydrogène, le filtre au moins doit être brûlé à l'air; on perd donc, de cette façon, un moyen de contrôle pour l'analyse de l'olivine.

En conséquence, pour oxyder le FeS, on versa sur la poudre mêlée de mercure métallique de l'acide nitrique concentré, et, après avoir laissé agir pendant longtemps à froid, on évapora à une douce chaleur. Le soufre étant alors complètement oxydé, à l'état de H_2SO_4 [1]), on pouvait, sans avoir à craindre le dégagement de H_2S, ajouter de l'acide chlorhydrique concentré. La poudre fut chauffée quelque temps avec cet acide, pour décomposer l'olivine, puis on évapora à siccité, afin de séparer complètement la silice mise en liberté.

La masse sèche fut bien épuisée par des lavages avec de l'eau contenant un peu de HCl, après quoi le résidu fut chauffé à l'ébullition avec une solution de Na_2CO_3, pour dissoudre la silice.

Un seul traitement par HCl ne donnant jamais une séparation parfaite des monosilicates et des bisilicates, — probablement parce que la silice gélatineuse enveloppe des particules d'olivine, — l'opération fut répétée. Il n'en résulta la dissolution additionnelle que d'une faible quantité de matière, de sorte que, après ce second traitement, la séparation pouvait être estimée complète.

La dissolution chlorhydrique contenait maintenant tout le soufre, sous la forme de H_2SO_4, ainsi que tout le mercure; le premier fut dosé à l'état de $BaSO_4$, puis le mercure fut séparé au moyen de H_2S.

Dans la liqueur filtrée on précipita, comme à l'ordinaire, le Fe par NH_3 et le Mg par Na_2HPO_4. De *chaux*, la dissolution était *entièrement exempte*. L'acide silicique fut séparé

1) Von Baumhauer dose le soufre de la météorite en chauffant la poudre avec de l'acide chlorhydrique et recueillant dans une dissolution d'argent le gaz sulfhydrique dégagé. J'ai cru suivre une methode plus directe et plus facile en oxydant le FeS par HNO_3 et precipitant, à l'état de $BaSO_4$, le H_2SO_4 formé.

de sa dissolution dans Na_2CO_3 par l'évaporation avec HCl.

La poudre restant après le traitement par l'acide chlorhydrique et le carbonate de soude, et consistant en bronzite et un peu de chromite, fut pesée, puis une portion fut attaquée par $(Na, K)_2CO_3$, une autre portion par HFl, et le dosage des éléments eut lieu de la manière habituelle. Lors de l'attaque par HFl et de la dissolution du résidu dans l'acide chlorhydrique, il resta quelques grains noirs de chromite. Au microscope, on constata qu'ils étaient encore souillés de quelques parcelles de bronzite non attaquée, raison pour laquelle ils furent soumis à un nouveau traitement par HFl et HCl. Le poids des grains de chromite, maintenant tout à fait purs, s'élevait à 0,24 % de celui de la bronzite, ou à 0,09 % de celui de la météorite. La matière était en quantité trop faible pour pouvoir être analysée; au chalumeau, dans le globule de borax, elle donnait une forte réaction de chrome.

Les résultats de l'analyse sont les suivants. Je rappelle encore une fois que les trois principaux éléments de la météorite n'ont pu être pesés séparément; la poudre primitive, destinée à l'analyse, et la bronzite insoluble dans l'acide chlorhydrique ont seules été pesées.

Fe	= 18,91	
Ni	= 2,30	. . . . . 21,32 % de fer nickelé
Co	= 0,11	
S	= 1,84	. . . . . 5,06 „ de fer sulfuré
Fe	= 3,22	
SiO_2	= 12,48	
FeO	= 7,46	. . . . . 33,39 „ d'olivine
MgO	= 13,45	
Bronzite	= 39,06	. . . . . . 39,06 „ de bronzite
Total	98,83 %	(dont 0,09 % de chromite)

Calculons maintenant la composition centésimale des minéraux constitutifs de la pierre. Pour le *fer nickelé*, on trouve:

$$\begin{aligned} Fe &= 88,68 \\ Ni &= 10,78 \\ Co &= 0,54 \\ \hline &100,00 \end{aligned}$$

Le fer nickelé n'ayant pas une composition constante, l'analyse de cet élément échappe à toute discussion ultérieure.

Au *fer sulfuré* (troïlite) nous avons déjà, pour calculer la quantité de Fe unie à S, attribué la composition Fe S (63,64 % de Fe, 36,36 % de S).

La composition de l'*olivine*, calculée d'après ses trois éléments, est la suivante:

		Oxygène.	
$Si\,O_2$	= 37,38	19,94	
$Fe_2\,O$	= 22,34	4,96	21,07
$Mg\,O$	= 40,28	16,11	
	100,00		

Le rapport des quantités d'oxygène, inscrites en regard de chaque élément, indique assez clairement un monosilicate, toutefois avec un petit déficit de $Si\,O_2$, ou un petit excès de Mg O et Fe O.

La silice et la magnésie de l'olivine ont été, toutes les deux, dosées directement, mais il n'en est pas de même pour Fe O; la quantité de Fe O qui revient à l'olivine a été calculée en retranchant, de la quantité totale de fer contenue dans la dissolution acide, le fer qui, d'après la quantité dosée de soufre existe comme Fe S dans la météorite. La teneur en fer de l'olivine peut donc avoir été évaluée trop haut, par suite d'erreurs provenant de différentes sources; ainsi:

1°. La dissolution des métaux par $Hg\,Cl_2$ n'a peut-être pas été complète, à cause, par exemple, d'une enveloppe d'olivine autour de quelques petites particules de fer;

2°. Le résultat du dosage du soufre peut avoir été un peu trop faible, de sorte que le calcul aurait donné un chiffre trop faible pour le fer uni à ce soufre, et par conséquent un chiffre trop élevé pour le fer de l'olivine;

3°. On a admis, tacitement, que tous les grains noirs visibles au microscope appartiennent à la chromite, insoluble dans les acides; or, parmi ces grains, il y a peut-être aussi un peu de magnétite.

En ce qui concerne la *bronzite*, la matière qui servit à l'analyse était extrêmement pure. Au microscope, on n'apercevait, à côté des fragments vert pâle de la bronzite, que très peu de chromite, en grains opaques.

L'analyse donna les chiffres suivants:

		Oxygène.	
$Si\,O_2$	= 56,61	30,19	14,29
$Al_2\,O_3$	= 3,75	1,75	
Fe O	= 16,04	3,56	
Mn O	= traces	—	
Ca O	= 3.00	0,86	
Mg O	= 19,52	7,81	
$Na_2\,O$	= 1,15	0,30	
$K_2\,O$	= 0.07	0,01	
chronite	= 0,24		
	100,38		

On a donc évidemment affaire à un bisilicate, qui, à raison de la forte proportion de Fe O, appartient indubitablement à la *bronzite*, et non à l'enstatite.

Les résultats de l'analyse prouvent que la séparation de l'olivine et de la bronzite a été très nette, ce qui n'a rien d'extraordinaire pour deux silicates présentant une telle inégalité de résistance à l'acide chlorhydrique. Aussi apprend-on avec surprise, dans le Mémoire de von Baumhauer (*l. c.* p. 318), que, la météorite de Tjabé ayant été traitée une première fois par H Cl (puis par $Na_2\,CO_3$), le résidu céda plus tard encore au-delà de 50 % de son poids, tandis que des deux analyses de von Baumhauer (p. 320 et 321) il ressort que ce résidu n'avait pas beaucoup changé de composition; la bronzite paraît donc être réellement attaquée par H Cl, quand cet

acide agit, pendant plusieurs jours, à la température de l'*ébullition*. D'après cela, je crois que la séparation des deux silicates s'obtient d'une manière plus nette au moyen d'un traitement moins énergique, mais prolongé, savoir en les chauffant avec H Cl au bain-marie, ainsi que je l'ai fait.

Comme résumé final, je donnerai encore le tableau complet de la composition de la météorite de Djati-Pengilon. Le hasard a voulu que le fragment soumis à l'analyse fût exceptionnellement riche en fer, car la proportion moyenne du fer nickelé, pour la météorite entière, ne peut, on l'a vu plus haut, s'élever à plus de 10 pour cent. [1])

			Proportion d'O:	
Fer nickelé = 21,32 %. Composition:		Fe = 88,68		
		Ni = 10,78		
		Co = 0,54		
Troïlite = 5,06 %. Composition:		Fe = 63,64		
		S = 36,36		
Olivine = 33,39 %. Composition:		SiO_2 = 37,37	19,94	19,94
		Fe O = 22,34	4,96	21,07
		Mg O = 40,29	16,11	
Bronzite = 38,97 %. Composition:	Calculée en centièmes, après déduction de la chromite.	SiO_2 = 56,53	30,15	30,15
		Al_2O_3 = 3,75	1,75	14,27
		Fe O = 16,01	3,56	
		Mn O = traces	—	
		Ca O = 3,00	0,86	
		Mg O = 19,49	7,80	
		Na_2O = 1,15	0,29	
		K_2O = 0,07	0,01	
Chromite = 0,09 %.				
98,83 %.				

[1]) Cette conclusion devra être modifiée. Voir la note 2, page 215.

Note du rédacteur.

Liste de publications concernant des chutes antérieures de météorites à Java.

(*Avec une petite carte de Java* Pl. V.)

1. E. H. von Baumhauer. *Sur le fer météorique de Prambanan dans le district de Soerakarta* (*île de Java*), dans *Archives néerlandaises*, T. I, 1866, p. 465—468.

Epoque de la chute, inconnue; un fragment, apporté à Solo le 13 février 1784, a déjà été employé tout entier à la fabrication d'armes; un second fragment, plus volumineux (environ 1 mètre cube), et qui doit encore se trouver dans le Kraton, fut amené de Prambanan le 12 février 1797. De ce dernier bloc proviennent les échantillons qui figurent dans les collections d'Europe.

Le résident de Soerakarta, M. A. J. Spaan, qui a fait récemment à Solo des recherches sur la signification du mot „*pamor*", écrit à ce sujet:

„*Pamor* signifie pierre météorique, ou plutôt le mot désigne, „en particulier, les météorites formées de *fer métallique*."

„D'après le Soesoehoenan, quatre fois seulement, à sa con„naissance, du *pamor* aurait été trouvé sur l'étendue de son „territoire, savoir, une fois sous l'administration du Soesoe„hoenan Pakoe-Boewono II, une fois du temps de Pakoe„Boewono VII et deux fois sous sa propre administration."

„Ces météorites sont en sa possession, mais elles ne me „furent pas montrées. Selon lui, il y a deux espèces de pamor, „le blanc et le noir."

„L'art de damasser les armes, telles que sabres et criss, „art que les Orientaux ont porté si loin, est une tentative „de donner à l'acier ou au fer l'aspect et peut-être aussi les „bonnes qualités du fer météorique. Bien que les armes da„massées soient également appelées *pamor*, ce n'est donc là „qu'une imitation du vrai pamor, savoir, du fer météorique."

„La supériorité du fer météorique sur le fer ordinaire est „si généralement reconnue, que le langage courant se sert

„même parfois du mot pamor dans le sens de „tout meilleur."

2. E. H. von Baumhauer. *Over den meteoriet van Tjabé* (*Java*), dans *Verh. der Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam*, Afd. Natuurkunde, 2de Reeks, Deel VI, 1871, blz. 54—73. Voir aussi: *Archives néerlandaises*, T. VI, 1871, p. 305—325 (*Sur la météorite de Tjabé dans l'Inde néerlandaise*), et *Natuurk. Tijdschrift van Ned. Indië*, Deel XXXII, blz. 242—250.

Tombée le 19 septembre 1869, à 9 heures du soir, dans le dessa Tjabé, district Padangan, arrondissement Bodjo-Negoro, résidence Rembang. La masse entière doit avoir pesé environ 20 kilogrammes, dont un peu plus de 1 k. fut envoyé à M. von Baumhauer. D'après les renseignements donnés, la pierre n'avait pénétré dans le sol que jusqu'à la profondeur de 2 pieds.

3. *Meteoriten gevallen nabij Bandong, Preanger-Regentschappen.* Communication de M. l'ingénieur des mines R. Everwijn, dans *Jaarboek van het Mijnwezen*, 1872, II, p. 197—201. Avec analyse chimique par le Dr. C. L. Vlaanderen.

Le 10 décembre 1871, à $1^h \frac{1}{2}$ de l'après-midi, il y eut une chute de 6 pierres aux environs de Bandong. La plus grosse tomba dans le village Goemoeroe, touchant au chef-lieu Bandong, dans un trou de 1 mètre de profondeur. Les 2e et 3e, par ordre de volume, tombèrent dans le village Babakandjati, à environ 1½ kilomètres au sud de l'endroit où eut lieu la chute de la plus grosse. Les trois plus petites tombèrent dans le village Tjigrellang, à environ 2 kilomètres au sud de Babakandjati.

Poids du N° 1 = 8,1 kilogrammes, du N° 2 = $2^k,45$, du N° 3 = $0^k,685$, des Nos 4, 5 et 6 ensemble = $0^k,152$. Poids spécifique = 3,519.

Le N° 3 fut analysé par M. Vlaanderen. A la suite du calcul de cette analyse (*l. c.*, p. 201), il est dit que la météorite contiendrait 17 % d'anorthite, ce qui évidemment est impossible, puisque la portion soluble dans l'acide chlorhydrique ne contient que 0,30 % de Ca O. La pierre paraît

aussi être très pauvre en fer nickelé, mais on ne dit pas de quelle manière le fer métallique fut déterminé. Si, dans la portion non dissoute par l'acide chlorhydrique, on porte les 4,30 % Fe_2O_3 en compte pour 3,87 % FeO, la somme de l'oxygène des bases est à l'oxygène de l'acide silicique comme 4,85 : 10,88, ou comme 1 : 2,24, ce qui indique assez nettement un bisilicate (bronzite). Des chiffres donnés, on peut conclure *approximativement* aux éléments suivants: 47 % d'olivine, 38 % de bronzite, 3 % de fer nickelé, 5½ % de troïlite, 4½ % de chromite. Somme = 98%.

La note de M. Everwijn, avec l'analyse de M. Vlaanderen, se trouve aussi dans une communication de M. Daubrée, *Comptes rendus*, T. LXXV, 1872, p. 1676; un extrait de celle-ci, dans: W. Flight, *Geological Magazine*, 1875, p. 216.

4. E. H. von Baumhauer. *Over den op* 3 *October* 1883 *te Ngawi en Midden-Java gevallen meteoriet*, dans *Versl. en Meded. der Kon. Akad. van Wetensch.*, Afd. Natuurk. 3de Reeks, Deel I, blz. 8—18, met 2 platen.

N°. 1. Pierre tombée le 3 octobre 1883, entre 5 et 5½ h. de l'après-midi, dans le dessa Gentoeng, district Djogorogo, arrondissement Ngawi, résidence Madioen; elle avait été cassée en 3 petits morceaux.

N°. 2. Pierre tombée, vers le même temps, à Kedoeng-Poetri, district Sepreh, arrondissement Ngawi.

On n'a fait un examen spécial que du N°. 1; le N°. 2 pèse 202,1 grammes, son P. S. à 15° C. est = 3,11, mais devient = 3,45 lorsque l'air est extrait par la pompe pneumatique. M. von Baumhauer a trouvé pour le N°. 1: P.S. = 3,561.

Sa description a été reproduite dans: *Jaarb. v. h. Mijnw.*, 1884, II, p. 331—342. Voir aussi: *Archives néerlandaises*, T. XIX, p. 177 (*Sur la météorite de Ngawi, tombée le* 3 *octobre* 1883, *dans la partie centrale de l'île de Java*).

N°. 3. Un troisième fragment de cette météorite paraît être tombé à Karang-Modjo, arrondissement Magetan, résidence Madioen, et être arrivé dans le musée de Leiden;

j'ignore toutefois quels ont été les témoins de la chute de cette pierre et par qui elle a été envoyée à Leiden. M. J. Bosscha fils a fait une étude microscopique très complète de cette pierre et l'a décrite dans les *Archives néerlandaises*, T. XXI, p. 177—200, ainsi que dans le *Neues Jahrbuch für Mineralogie* etc., V[ter] Beilage-band, 1887, Seite 126—144, avec 3 planches.

5. R. D. M. Verbeek. *De meteoriet van Djati-Pengilon* (*Java*), *gevallen* 19 *Maart* 1884, dans *Jaarboek van het Mijnwezen*, 1886.

Note. D'après une communication du Colonel A. Haga, chef de l'Etat-major général, un météore a été vu, le dimanche 20 octobre 1872, à Soerabaja, et est probablement tombé au voisinage de cette ville. Dans le *Soerabaja-Courant* du 21 octobre 1872 il est fait mention, sans aucun détail, d'une météorite qui doit être tombée près de cette localité, en émettant une vive lumière, comme une étoile filante. Les tentatives ayant pour but d'obtenir des fragments de cette pierre sont restées jusqu'ici sans succès. Il est même encore incertain si le météore a été simplement *vu*, ou s'il est réellement *tombé* à Soerabaja ou aux environs.

Rien n'est connu, jusqu'à ce jour, des chutes de météorites qui peuvent avoir eu lieu dans les autres îles de l'archipel Indo-Néerlandais.

NOTE SUR UN CAS DE POLYDACTYLIE,

PAR LE

Dr. C. H. H. SPRONCK

Quoique les cas de polydactylie chez l'homme soient assez fréquents, la dissection n'en est pas moins rare, car la chirurgie, peu conservatrice à cet égard, enlève promptement ces soi-disant „difformités". Néanmoins, la polydactylie mérite aujourd'hui d'autant plus l'attention de l'anatomiste, que les recherches récentes sur le carpe et sur le tarse des vertébrés et de l'homme conduisent à admettre qu'elle n'est pas nécessairement de nature pathologique, mais qu'il peut en réalité s'agir d'un atavisme, comme *Darwin* l'a signalé le premier. D'ailleurs cette opinion, loin de servir d'appui à son hypothèse de la descendance, a été souvent attaquée par ses adversaires, et quelques anatomistes, e. a. Gegenbauer [1]), se sont prononcés pour la nature pathologique de cette affection.

Je n'examinerai pas ici les motifs qui ont porté ces auteurs à réprouver l'opinion de Darwin. Les objections de Gegenbauer sont certes de toute importance, mais les recherches récentes de Bardeleben [2]) leur ont fait perdre de leur valeur pour les

---

[1]) Gegenbauer, *Bemerkungen über Polydactylie als Atavismus*, dans *Morphol. Johrbuch*, Bd. VI, S. 584, 1880.

[2]) K. Bardeleben, *Ueber neue Bestandtheile der Hand- und Fusswurzel der Säugethieren, sowie das Vorkommen von Rudimenten „überzähliger" Finger und Zehen beim Menschen*, dans Jena'*sche Zeitschr. f. Naturwissensch.* Bd. XIX, S 84 u. 149, 1886.

cas de polydactylie, dans lesquels le doigt surnuméraire occupe le bord radial ou cubital de la main.

D'après les recherches de Bardeleben, la main (pied) typique des mammifères n'est pas pentadactyle. Tout porte à croire qu'elle fut primitivement *heptadactyle*, opinion que Leboucq [1]) et Wiedersheim [2]) partagent également. Aussi bien du côté radial que du côté cubital de la main, il y a eu réduction d'un rayon. Le pouce ne représente que le 2me, le petit doigt le 6me doigt de la main heptadactyle. Sans faire état de ce que l'examen comparatif des extrémités des amphibies et des reptiles (surtout le carpe des anoures (Born) et celui des chéloniens (Baur)) prouve à cet égard, les vestiges du praepollex et du 7me rayon existent chez un grand nombre de mammifères et chez l'homme (Bardeleben).

Pour ce qui concerne le premier rayon de la série typique, Bardeleben considère comme vestiges du præpollex chez l'homme: (1) le tubercule radial (*tuberositas*) du scaphoïde, qui d'après ses recherches constitue dans le carpe embryonnaire un nodule cartilagineux distinct (*cartilago marginalis*), se soudant plus tard avec le scaphoïde; (2) l'éminence radiale du trapèze, dont le bord radial de la face distale présente une petite facette articulaire, jusque-là inconnue; (3) la partie radiale de la base du métacarpien du pouce, qui, d'après cet auteur, montre également une petite facette articulaire du côté radial.

Quant aux vestiges du 7me rayon, comme tels sont interprétés: (1) l'os pisiforme; (2) l'apophyse styloïde du cubitus (Bardeleben), qui chez l'homme naît probablement d'un nodule cartilagineux distinct; (3) enfin, peut-être, le ménisque inter-

---

1) H. Leboucq, *Sur la morphologie du carpe et du tarse*, dans *Anatom. Anzeiger*, I Jahrg. Nr. 1, 1886.

2) R. Wiedersheim, *Lehrbuch der vergleichenden Anatomie*. Jena 1886, S. 224.

——————— *Der Bau des Menschen als Zeugniss für seine Vergangenheit*, Freiburg 1887.

articulaire entre l'extrémité distale du cubitus et le carpe, dans lequel se différencie, d'après Leboucq [1]), un nodule cartilagineux, existant pendant les 3me et 4me mois de la vie fœtale.

La disposition des muscles occupant le bord radial de la main mérite également l'attention à cet égard. Bardeleben [2]) rattache une partie du musle grand abducteur du pouce au praepollex. Le tendon de ce muscle présente chez l'homme presque régulièrement une division longitudinale, qui peut s'étendre au ventre musculaire: le tendon radial vient s'implanter aux parties du carpe qui représentent les rudiments du praepollex. Chez les anthropomorphes, (Gorille, Chimpanzé) cette disposition paraît constante: un „os sésamoïde" situé au bord radial du carpe, entre le scaphoïde et le trapèze, donne attache au tendon radial.

Ayant en vue les recherches de Bardeleben, M. Rijkebüsch vient de décrire dans sa dissertation inaugurale [3]) un cas de polydactylie assez remarquable, disséqué soigneusement au laboratoire d'anatomie normale d'Utrecht, sous la direction de M. le professeur Koster. C'est à la bienveillance de l'auteur que je dois la reproduction de quelques planches de son mémoire, qui me permet de donner un court exposé de la disposition du squelette et des muscles, dont j'ai suivi la dissection.

Main gauche offrant quatre doigts normaux et deux pouces. Les deux pouces sont unis par syndactylie: le pouce radial (praepollex) se compose d'un métacarpien et de deux phalanges, le pouce cubital (pollex) d'un métacarpien et de trois phalanges.

---

1) H. Leboucq, *Recherches sur la morphologie du carpe chez les mammifères*, dans *Arch. de Biologie*, V, 1884, p. 35.

2) l. c.

3) P. A. H. Rijkebüsch. *Bijdrage tot de kennis der polydactylie*, Utrecht 1887.

Il s'agit de la main gauche d'un homme adulte [1]), offrant un praepollex nettement accusé. Le praepollex occupe le bord radial du pouce, auquel il est uni par syndactylie (Pl. VI). Les deux pouces sont presque immobiles et présentent l'opposition normale aux quatre derniers doigts, qui n'accusent aucune difformité. Le volume du praepollex, grêle et délicat, diffère considérablement de celui du pouce, qui est de beaucoup plus fort et plus gros.

I. Squelette.

Le praepollex (Pl. VII, *m*) se compose d'un métacarpien (long de 5,5 cm.) et de deux phalanges: une phalange basale (longue de 3,5 cm.), une phalange onguéale (longue de 2 cm.); le pouce, au contraire, présente, comme les quatre derniers doigts, un métacarpien et *trois* phalanges.

L'extrémité proximale du métacarpien du praepollex s'articule au moyen de deux facettes, logées dans la même articulation et jointes à angle droit, avec l'extrémité proximale du métacarpien du pouce et avec le carpe. De ces facettes, l'une, occupant le bord cubital de l'os, est lisse, plane et revêtue d'une couche cartilagineuse: elle est ajustée contre une facette pareille, occupant le bord radial de la base du métacarpien du pouce; l'autre, occupant l'extrémité libre de l'os, lisse, plane, presque carrée, ne possède pas une couverture cartilagineuse: elle est dirigée vers une petite facette du trapèze, située à la partie radiale de l'extrémité distale de cet os. Une distance d'environ 3 mm. sépare l'extrémité libre du métacarpien du praepollex de la facette articulaire du trapèze, qui est revêtue d'une membrane fibreuse. La poche synoviale, qui du bord des facettes articulaires du praepollex se réfléchit sur le métacarpien du pouce et sur le trapèze,

[1]) C'est la seule indication que nous possédons à l'égard du cadavre, dont le bras gauche avait été tranché au niveau de la partie moyenne de l'humérus.

est fort peu lâche du côté du pouce, où elle est recouverte de fibres ligamenteuses très fortes, qui se portent transversalement d'un métacarpien à l'autre, empêchant le glissement entre ces deux os. Du côté du trapèze, la poche synoniale est au contraire très lâche et flottante, quoique la surface articulaire du praepollex ne touche jamais celle du trapèze, à cause de l'immobilité de l'articulation carpo-métacarpienne du pouce.

Quant aux autres articulations du praepollex, leurs surfaces articulaires, encroûtées de cartilages, sont peu développées. L'articulation métacarpo-phalangienne du praepollex rappelle en quelque sorte l'arthrodie, l'articulation phalangienne le ginglyme des autres doigts.

L'extrémité proximale du métacarpien du pouce, enchassée entre le métacarpien du praepollex et celui du pouce, présente quatre facettes recouvertes de cartilages minces : (1) Une facette articulaire large, presque plane, occupant la plus grande partie de l'extrémité libre et articulée avec le trapèze ; (2) une facette plane, arrondie et articulée avec le trapézoïde ; (3) du côté cubital une facette large, plane, s'articulant avec le métacarpien de l'index ; (4) enfin du côté radial la petite facètte que nous avons vue en contact avec le métacarpien du praepollex. L'articulation qui résulte de son contact avec le trapèze, le trapézoïde et le métacarpien de l'index est une amphiarthrose. Les ligaments de cette articulation offrent la même disposition que ceux des articulations des quatre derniers os du métacarpe avec le carpe et consistent en un ligament dorsal et un ligament palmaire, composés de faisceaux très-courts, quadrangulaires et très serrés. L'articulation métacarpo-phalangienne du pouce est formée par la réception de la tête du métacarpien dans la fossette que présente l'extrémité proximale de la première phalange. C'est une arthrodie, comme celles des doigts. Les articulations des trois phalanges du pouce entre elles sont des ginglymes et offrent par rapport à leurs surfaces articulaires et à leurs ligaments la plus grande res-

semblance avec les articulations phalangiennes des doigts.

Le squelette des quatre derniers doigts se présente comme à l'état sain. Les quatre derniers os du métacarpe s'adaptent au carpe de la manière suivante: Le métacarpien de l'index s'unit au trapézoïde par deux facettes jointes à angle obtus, et par une petite facette au grand os. La facette plane, qui à l'état normal s'articule avec le trapèze, fait défaut. Le métacarpien du médius s'articule exclusivement avec le grand os. Celui de l'annulaire et celui du petit doigt s'appuient sur l'os crochu. La rangée distale du carpe se compose du trapèze, du trapézoïde, du grand os et de l'os crochu, dont nous venons de décrire le mode d'union avec les métacarpiens; ces os, comme ceux de la rangée proximale (scaphoïde, semi-lunaire, pyramidal, pisiforme) ce comportent, quant à leur rapport mutuel, comme à l'état normal. Entre ces deux rangées se trouve intercalé du côté radial un os surnuméraire, l'os central du carpe. Cet os est reçu dans une cavité que présentent le scaphoïde et le semi-lunaire, et s'articule avec trois os de la rangée distale: le trapèze, le trapézoïde et le grand os. Le central (Pl. VII, *g*) affecte la forme d'une pyramide pentagone, dirigeant son sommet vers la face palmaire, sa base vers la face dorsale de la main. En raison de cette forme, l'on distingue cinq facettes lisses, encroûtées de cartilages, s'articulant avec cinq os du carpe. Une facette proximale convexe, assez large (haute de 10 mm., large de 16 mm.), s'articule avec le scaphoïde [1]); une autre, assez étroite (haute de 10 mm., large de 3 mm.), se joint au semi-lunaire. Du côté distal, une facette convexe (haute de 10 mm., large de 7 mm.) appuie sur le trapèze, une seconde (haute de 10 mm., large de 4 mm.) sur le trapézoïde. Enfin une cinquième facette, carrée (haute et large de 12 mm.), légèrement concave, s'unit du côté cubital avec la tête du grand os.

De la face dorsale et palmaire de l'os central partent une

---

1) Le central n'est sur aucun point soudé avec le scaphoïde.

quantité de faisceaux fibreux, qui s'attachent aux os voisins du carpe. Ces faisceaux sont très courts et serrés du côté proximal de l'os, de telle sorte que l'os est lié à la rangée proximale du carpe et ne peut se mouvoir. Du côté distal, ces faisceaux, également très courts, sont moins serrés et laissent entre eux des écartements à travers lesquels on aperçoit la capsule synoviale qui en tapisse la face interne. La contiguïté du central avec le trapèze, le trapézoïde et le grand os constitue ainsi la partie radiale de l'articulation des deux rangées des os du carpe l'une avec l'autre.

Le bord radial du carpe et surtout le tubercule externe (*tuberositas*) du scaphoïde, ainsi que l'éminence du trapèze, furent examinés avec beaucoup de soin; ils ne présentent aucune particularité. Après ce qui précède, je n'aurai pas besoin de rappeler que la face distale du trapèze a deux facettes articulaires, l'une dirigée vers le métacarpien du præpollex, l'autre ajustée contre le métacarpien du pouce.

II. Muscles.

a. Muscles de l'avant-bras.

Des muscles de la *région antibrachiale interne et superficielle*, le grand pronateur (*M. pronator teres*), le petit palmaire (*M. palmaris longus*) et le muscle radial antérieur (*M. flexor carpi radialis*) n'offrent aucune anomalie. Le tendon du radial antérieur (*M. flexor carpi radialis*), dont l'origine affecte les rapports normaux, passe au devant de l'articulation radio-carpienne et s'attache en partie au ligament annulaire; il s'engage dans la coulisse du trapèze, puis, en s'élargissant, vient se perdre dans les ligaments palmaires qui recouvrent la rangée distale du carpe.

Le muscle fléchisseur superficiel des doigts se compose de deux plans musculaires, dont le superficiel se divise en deux portions, qui se portent chacune à un tendon appartenant aux doigts médius et annulaire; le plan profond se divise au contraire en *trois* portions, dont chacune donne naissance à un

tendon: un pour le petit doigt, un autre pour l'index, enfin un troisième, occupant le bord radial du muscle, *pour le pouce*. Ces cinq tendons passent dans la coulisse que présente la face interne du carpe et y sont retenus par le ligament annulaire. Le tendon du pouce se comporte comme ceux des doigts; il se loge dans une gouttière que présente la face palmaire des phalanges, et après avoir été perforé par le tendon du fléchisseur profond, se termine sur la seconde phalange, près de sa base.

Quant aux muscles de la *région antibrachiale interne et profonde*, le muscle fléchisseur profond des doigts et le carré pronateur se présentent comme d'ordinaire. Le tendon du grand fléchisseur du pouce (*M. flexor pollicis longus*) passe sous le ligament annulaire, puis descend au-devant des muscles de la région palmaire externe de la main. Ensuite, il se loge dans la gaîne fibreuse du pouce, traverse la fente du tendon du fléchisseur superficiel et vient enfin s'insérer à la phalange onguéale du pouce.

Muscles de la région antibrachiale radiale.

Le muscle grand supinateur (*M. brachio-radialis*) nâit par des fibres aponévrotiques courtes du bord externe de l'humérus et de l'aponévrose placée entre lui et le triceps brachial; son faisceau charnu, large de 3 cm., long de 11 cm., aplati transversalement, s'insère par un tendon aplati à la face antérieure du radius, déjà au niveau de la partie inférieure de son tiers supérieur (à une distance de 10 cm. de l'extrémité proximale du radius) [1]).

Les muscles premier et second radial (*M. radialis longus et brevis*) sont intimement unis à leur origine; leur faisceau charnu commun se divise, au niveau de l'insertion mentionnée du grand supinateur, en deux portions, qui se portent chacune à un tendon. Les deux tendons descendent le long

---

[1]) La même anomalie du muscle grand supinateur a été observée et décrite par Testut (*Les anomalies musculaires chez l'homme*, Paris 1884, p. 541).

du radius, glissent au-dessous des muscles qui se rendent au praepollex et au pouce et s'engagent dans une coulisse particulière du ligament annulaire externe, dans laquelle le tendon du premier radial se divise en deux tendons distincts. En sortant de cette coulisse, les trois tendons s'écartent et glissent encore au-dessous du grand extenseur du pouce. Des tendons du premier radial, le plus mince s'implante à la base du métacarpien du pouce, l'autre, plus fort, à celui de l'index ; le tendon du second radial va s'attacher au métacarpien du médius.

Région antibrachiale externe et superficielle.

Le muscle extenseur commun des doigts est terminé inférieurement par *trois* tendons, qui au-dessous de la coulisse du ligament annulaire divergent pour gagner l'index, le médius et l'annulaire.

Le muscle extenseur du petit doigt (*M. extensor digiti quinti proprius*), le muscle cubital externe (*M. extensor carpi ulnaris*) et le muscle anconé (*M. anconaeus quartus*) ne présentent pas d'anomalie.

Région antibrachiale externe et profonde.

Le muscle petit supinateur (*M. supinator brevis*) et l'extenseur propre de l'indicateur (*M. extensor indicis proprius*) se comportent comme d'ordinaire.

Un groupe de *cinq* muscles distincts occupe la place qui, à l'état normal, donne naissance aux muscles grand abducteur (*M. abductor pollicis longus*), petit et grand extenseur du pouce (*M. extensor pollicis longus et brevis*) ; il est couché obliquement en arrière et en dehors de l'avant-bras. En procédant du dedans au dehors et de haut en bas, les muscles, l'un au-dessous de l'autre, prennent naissance du cubitus, puis du ligament interrosseux et du radius. Allongés, aplatis, fusiformes, ces muscles se terminent chacun par un tendon qui passe sur ceux des deux muscles radiaux externes et croise leur direction, pour s'implanter soit au carpe, soit au praepollex ou au pouce. En procédant de haut en bas et du côté radial au cubital, on trouve :

1) Un faisceau musculaire, le plus volumineux du groupe, naissant du cubitus, du ligament interrosseux et du radius. Il est terminé par un tendon (large de 8 mm., épais de 2 mm.) qui passe dans une coulisse creusée dans l'extrémité distale du radius et qui y est retenu par le ligament annulaire externe. Dans cette coulisse, il est séparé du tendon du muscle radial interne (*M. flexor carpi radialis*) par une cloison fibreuse, sur laquelle s'attache un petit faisceau aponévrotique (large de 1 mm.) quittant le tendon principal au niveau du croisement des tendons des muscles radiaux externes. En sortant de là, le tendon vient s'implanter au bord radial du trapèze. Ce muscle (Pl. VIII, *m*), par son origine et sa disposition, rappelle le muscle grand abducteur du pouce et principalement la partie radiale de celui-ci (voyez p. 237); c'est donc un *muscle abducteur radial du carpe.*

2) Un second muscle (Pl. VIII, *n*), né également du cubitus, du ligament interosseux et du radius, et dont les fibres charnues constituent un faisceau grêle (large de 1 cm.), est terminé par un tendon aplati (large de 4 mm.), longeant le bord cubital de celui du muscle précédent. Ce tendon passe dans une seconde coulisse particulière du ligament annulaire externe, glisse à la face dorsale du métacarpien du praepollex, se contourne au niveau de l'articulation métacarpo-phalangienne sur le côté radial du praepollex, dont il gagne la face palmaire, et vient s'insérer à la base de la phalange onguéale. De chaque côté, le tendon principal est accompagné d'un tendon fort grêle (large de 1 mm.), résultant de sa division longitudinale: celui qui occupe le bord radial du tendon principal s'implante sur le côté radial de la base du métacarpien du praepollex; celui qui en occupe le bord cubital s'attache également au côté radial du praepollex, au niveau de l'articulation métacarpo-phalangienne. Ce muscle paraît représenter un *grand fléchisseur du praepollex.*

3) Un troisième muscle (Pl. VIII, *o*), un peu moins épais que le précédent, d'une forme analogue à la sienne, naît du

ligament interrosseux et du cubitus. Ses fibres charnues, en quelque sorte unies avec celles de ses voisins, s'implantent sur un tendon, qui s'engage sous le ligament annulaire dorsal, dans une troisième coulisse située auprès de la précédente, et descend sur la face dorsale du métacarpien du praepollex ; il s'élargit au niveau de l'articulation métacarpo-phalangienne, en formant une aponévrose qui recouvre toute la face dorsale du praepollex. Il s'agit vraisemblablement d'un *muscle extenseur du praepollex.*

4) Un quatrième muscle (Pl. VIII, *p*), placé à son origine presque entièrement derrière le muscle précédent, naît du ligament interosseux et du cubitus, et est terminé par un tendon qui passe par la même coulisse (troisième) que le muscle précédent. En quittant cette coulisse, le tendon descend à la face dorsale du métacarpien du pouce, s'aplatit et va s'implanter, au niveau de l'articulation métacarpo-phalangiene, sur une expansion aponévrotique qui recouvre la face dorsale du pouce.

5) Enfin, un cinquième muscle, beaucoup plus volumineux que le précédent, nâit du cubitus, où ses fibres charnues sont en connexion avec celles du muscle qui précède. Devenu libre, le faisceau charnu (large de 2 cm.) se dirige vers le côté radial de l'avant-bras et se termine par un tendon qui s'engage sous le ligament annulaire dans une coulisse particulière, séparée de celle du muscle précédent par la coulisse qu'occupent les tendons des muscles radiaux externes. En quittant cette coulisse, le tendon passe sur les tendons de ces muscles, croise leur direction, descend à la face dorsale du métacarpien du pouce (Pl. VIII, *q*), se joint, au niveau de l'articulation métacarpo-phalangienne, au tendon du muscle précédent, glisse en s'élargissant sur la première phalange du pouce, à laquelle il tient par des expansions fibreuses, et vient se perdre au niveau de la deuxième phalange dans l'aponévrose dorsale.

Les deux muscles précédents (4 et 5) représentent vrai-

semblablement les muscles *petit et grand extenseur du pouce.*

b) *Muscles de la main.*

Les muscles de la *région palmaire radiale* s'attachent soit au praepollex, soit au pouce. Ceux qui s'insèrent au praepollex sont au nombre de deux:

1) Un muscle superficiel, dont les fibres charnues, nées du ligament annulaire interne, forment un faisceau grêle qui, par de courtes fibres aponévrotiques, vient s'implanter sur la face palmaire du métacarpien du praepollex, tout le long de la moitié proximale de cet os. C'est le seul muscle de cette région qui prend naissance du ligament annulaire interne (Pl. IX, *a*).

2) Placé en dedans et au-dessous du muscle précédent, ce muscle ne devient appréciable que lorsqu'on a enlevé le ligament annulaire antérieur. Très grêle, ce muscle naît par de courtes fibres aponévrotiqus des ligaments profonds de la face palmaire du carpe et s'attache à la face palmaire de la base de la première phalange du praepollex (Pl. IX, b). Les fibres charnues, à leur origine, sont en connexion avec un muscle qui se rend au pouce.

Le premier de ces deux muscles peut être considéré comme *opposant* (*M. opponens*), le second comme *court fléchisseur* (*M. flexor brevis*) du praepollex.

Les muscles qui se rendent au pouce sont de beaucoup plus volumineux que les précédents; ils sont au nombre de trois:

1) Le premier, uni au muscle profond du praepollex, prend naissance des ligaments profonds de la face palmaire du carpe par un tendon aplati et assez fort (Pl. IX, *c*). Les fibres charnues naissant de ce tendon viennent s'insérer par de courtes fibres aponévrotiques à la partie radiale de l'extrémité proximale de la première phalange du pouce.

2) Le deuxième, large, triangulaire, naît tout le long de la face palmaire du métacarpien du médius et de la face palmaire du carpe, où il est uni avec le muscle précédent, qui

le recouvre en partie. Les fibres charnues, en convergeant, se terminent par un tendon assez fort, fixé, avec le tendon du muscle précédent, à la partie radiale de l'extrémité proximale de la première phalange du pouce (Pl. IX, *e*).

3) Enfin le troisième muscle, bien distinct, à peine large de la moitié du muscle précédent, et en partie recouvert par celui-ci, naît du métacarpien du médius et de l'articulation métacarpo-phalangienne de ce même doigt (Pl. IX, *g*). Ses fibres charnues constituent un faisceau peu aplati, qui se dirige transversalement vers le pouce et se termine par un tendon aplati, s'attacheant à la partie cubitale de l'extrémité proximale de la première phalange du pouce.

Tandis que le premier de ces trois muscles semble représenter un *court fléchisseur*, le deuxième et le troisième paraissent constituer les deux chefs d'un muscle *adducteur du pouce.*

Les muscles de la *région palmaire cubitale* se comportent comme à l'état normal. Quant aux muscles de la *région palmaire moyenne*, ils présentent la disposition suivante :

Muscles lombricaux.

1) Le premier montre trois chefs distincts, à forme grêle, arrondie, allongée, fusiforme. L'un de ces chefs naît du tendon du muscle fléchisseur superficiel qui se rend au pouce, au niveau de la partie moyenne du métacarpien du pouce ; il descend obliquement au-dessus des muscles du pouce, pour s'unir aux tendons des autres chefs. Un second chef prend naissance, vers le haut de la main, du tendon du muscle fléchisseur profond du pouce. Enfin le troisième chef naît du tendon du muscle fléchisseur profond qui va à l'index. Les tendons de ces trois chefs s'unissent au côté radial de l'articulation métacarpo-phalangienne de l'index, s'élargissent, se confondent avec le tendon du muscle interrosseux correspondant et se perdent dans le tendon du muscle extenseur.

2) Le deuxième naît du bord radial du tendon du muscle fléchisseur qui va au médius, et s'attache, en se comportant comme d'ordinaire, au côté radial de ce doigt.

3) Le troisième lombrical naît avec deux chefs, peu distincts, des tendons du muscle fléchisseur profond qui se rendent au médius et à l'annulaire, et s'attache de la même façon au côté radial de l'annulaire.

4) Le quatrième lombrical fait défaut.

Muscles interrosseux.

Les muscles interrosseux sont au nombre de neuf. Le nombre des interrosseux externes s'est augmenté d'un muscle abducteur du pouce; le nombre des interrosseux internes s'est accru d'un muscle adducteur du praepollex.

L'*abducteur du pouce* naît tout le long du bord radial du métacarpien du pouce et du tiers proximal du bord cubital du métacarpien du praepollex. Les deux chefs se réunissent en un faisceau, qui se termine par un tendon fixé au côté radial de la première phalange du pouce.

L'*adducteur du praepollex* (Pl. IX, *l*) naît du ligament transversal palmaire qui recouvre l'articulation entre le praepollex et le pouce, et du bord cubital du métacarpien du pouce; il s'attache au côté radial de la première phalange du praepollex.

Les autres interosseux se comportent comme d'ordinaire.

Résumé et conclusions.

Dans notre cas, le praepollex ne constitue pas un simple appendice de la main, il occupe une place dans la rangée des doigts et s'articule avec le carpe et le métacarpien du pouce. Le bord radial du squelette du carpe offre la disposition normale: les parties du trapèze et du scaphoïde, qui, d'après Bardeleben, représentent les vestiges de la traînée squelettique du praepollex, ne se sont pas différenciées. Cependant, les dispositions de ces deux os du bord radial du carpe sont intéressantes. Le scaphoïde offre une disposition primitive en ce que cet os ne s'est pas soudé avec le central du carpe (Leboucq). Le central, bien distinct, s'articule avec cinq différents os du carpe: comme dans le premier stade de son développement, le central est encore en rapport avec le

semi-lunaire (Leboucq), dont plus tard le développement du grand os le sépare ordinairement, puis il s'articule avec le grand os, le trapézoïde et le trapèze. Dans le trapèze il faut signaler une altération de sa face distale, qui s'articule avec les métacarpiens du praepollex et du pouce. Du côté radial de cette face, on trouve une petite facette non recouverte de cartilage, mais tapissée par une membrane fibreuse, vraisemblablement parce qu'elle n'est pas en contact avec la facette du praepollex, dirigée vers elle. Du côté cubital, se trouve une facette large et aplatie, recouverte de cartilage, articulée avec le métacarpien du pouce; celle-ci diffère de l'état normal aussi bien par sa forme que par le déplacement qu'elle a subi vers le côté cubital. Ce déplacement se manifeste en ce que le métacarpien du pouce ne s'articule pas seulement avec le trapèze, mais aussi avec le trapézoïde. Comme pour faire place au praepollex dans la rangée des doigts, les métacarpiens du pouce, de l'index et du médius se sont déplacés vers le côté cubital: celui de l'index s'articule avec le trapézoïde et le grand os, celui du médius exclusivement avec le grand os.

Pour ce qui concerne le pouce, ses trois phalanges, ses articulations carpo-métacarpienne et métacarpo-phalangienne rappellent la disposition des doigts. Pourtant l'opposition, l'articulation avec le trapèze, puis les insertions musculaires indiquent clairement qu'il s'agit du pouce, qui présente la plus grande analogie avec les doigts.

La présence du central du carpe, sur lequel les idées sont bien fixées aujourd'hui, semble indiquer le caractère tout à fait primitif des anomalies du squelette de la main, accompagnant l'apparition du praepollex. La disposition du pouce, manifestant les caractères des doigts, ne paraît pas en désaccord avec cette manière de voir.

Quant aux anomalies musculaires, il y en a certes de nature accidentelle, mais cela ne semble pas être le cas pour les muscles du praepollex, qui présentent un arrangement et une disposition conformes au squelette.

Le groupe, composé de cinq muscles, occupant la place du grand abducteur et des petit et grand extenseurs du pouce, mérite surtout notre attention. De ces muscles, en procédant dans l'ordre que nous avons suivi pour leur description, les deux derniers, sans doute, représentent les muscles petit et grand extenseur du pouce. Le muscle grand abducteur du pouce est donc remplacé par les trois premiers muscles du groupe, dont nous avons désigné le premier par le nom d'abducteur du carpe, le deuxième et le troisième par les noms de long fléchisseur et d'extenseur du praepollex. Si la supposition que nous avons émise touchant l'état primitif du squelette est juste, la disposition de ces muscles peut jeter quelque lumière sur la genèse du muscle grand abducteur du pouce. L'on serait donc porté à croire que non seulement la partie radiale (Bardeleben), mais *ce muscle tout entier doit être rattaché au praepollex*. La partie cubitale pourrait être interprétée comme résultant de la fusion des muscles long fléchisseur et extenseur du praepollex: à l'état normal, cette partie s'insère aussi au côté radial de la base du métacarpien du pouce, là où, d'après Bardeleben, le reste du praepollex se soude à cet os.

Quant aux autres anomalies, l'on pourrait émettre des suppositions touchant leur origine et leur signification; je me suis borné à examiner comparativement les points de repère que les recherches de Bardeleben nous ont fait connaître. Comme ces recherches démontrent que la main typique des mammifères n'est point pentadactyle et qu'il y a eu réduction du côté radial, il ne paraît pas douteux que le praepollex, dans notre cas, doit être considéré comme représentant le rayon radial disparu.

Il est évident que cette conclusion ne peut être généralisée pour tous les cas de polydactylie. Le travail de M. Rijkebusch est une contribution à l'étude de la question, sur laquelle des recherches ultérieures ont à jeter plus de lumière.

Explication des Planches.

Pl. VI. Face palmaire de la main : *a* praepollex, *b* pouce, unis par syndactylie ; *c* articulation phalangienne proximale du pouce, immobilisée par la syndactylie des deux pouces.

Pl. VII. Face dorsale du squelette de la main ; le praepollex est mis en abduction, pour le rendre visible.

a radius.
b cubitus.
c scaphoïde.
d semi-lunaire.
e pyramidal.
f pisiforme.
g central.
h trapèze.
i trapézoïde.
k grand os.
l os crochu.
m métacarpien du praepollex.
n 〃 du pouce.

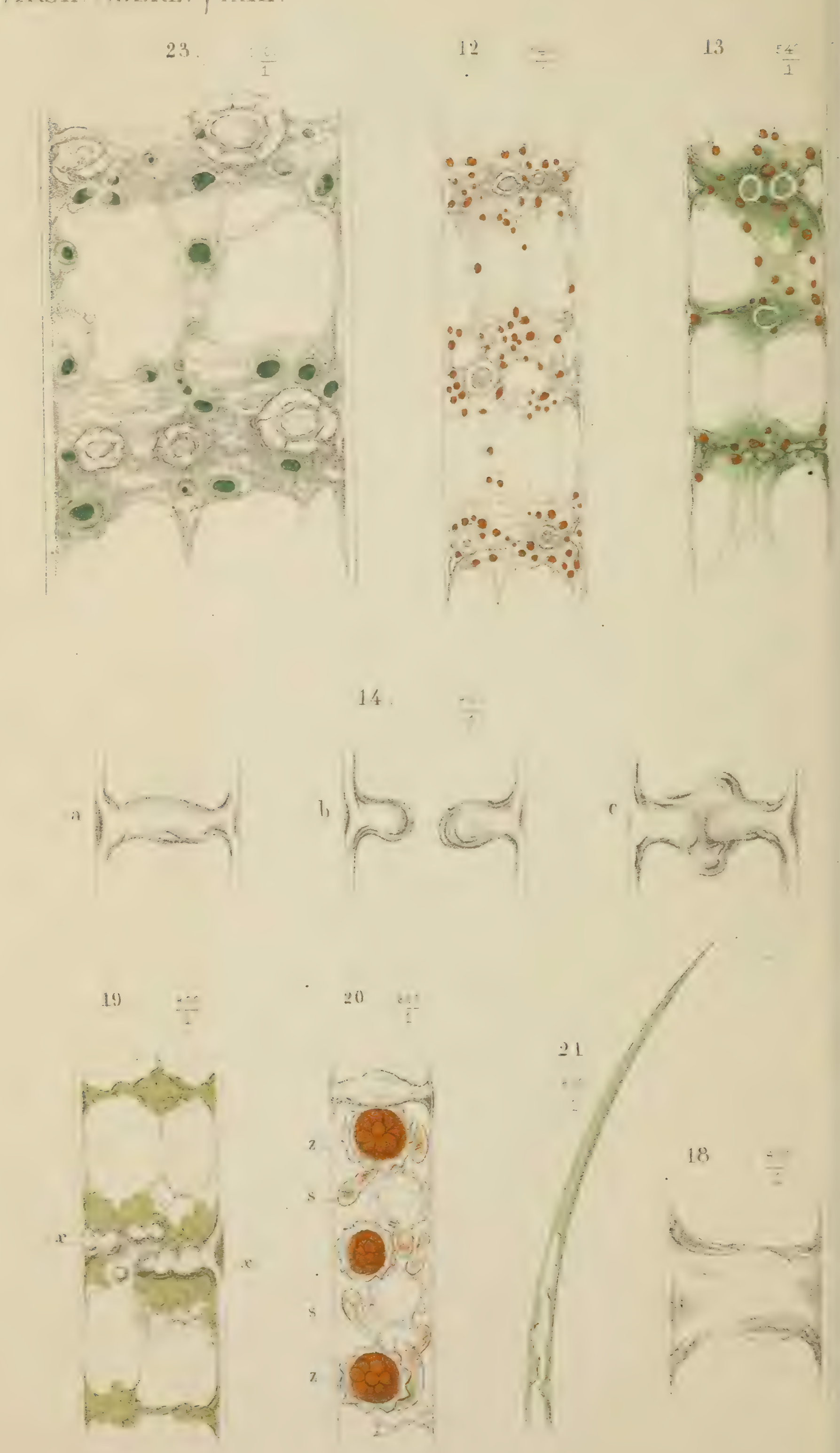
Pl. VIII. Région radiale de l'avant-bras.

a Muscle biceps brachial.
b Expansion fibreuse du tendon de ce muscle.
c Muscle grand pronateur.
d 〃 radial antérieur.
e 〃 grand supinateur.
f Métacarpien du praepollex.
g Muscle premier radial.
g' Son insertion au pouce.
g'' Son insertion à l'index.
h Muscle second radial.
i 〃 extenseur commun des doigts.
k Métacarpien du pouce.
l 〃 de l'index.
m Muscle abducteur radial du carpe
n 〃 grand fléchisseur du praepollex.
o 〃 extenseur du praepollex.
p 〃 petit extenseur du pouce.
q 〃 grand extenseur du pouce.
r 〃 extenseur propre de l'indicateur.

s Ligament annulaire externe.
t Muscle flechisseur superficiel des doigts.

Pl. IX. Région palmaire de la main. Muscles du praepollex et du pouce.
a Muscle opposant du praepollex.
b 〃 court fléchisseur du praepollex.
c 〃 court fléchisseur du pouce.
d Tendon du muscle radial antérieur
e Chef proximal du muscle abducteur du pouce.
f Muscle cubital interne.
g Chef distal du muscle adducteur du pouce.
h Muscle adducteur du petit doigt.
i 〃 court fléchisseur du petit doigt.
k 〃 opposant du petit doigt.
l 〃 interroseux interne du praepollex.
m praepollex.
n pouce.
o nerf cubutal.


1
2
4
5
6
a
b
c
d
p
k
z
7
8
9
10
11
3


23.
12
13
14.
a
b
c
19
x
x
20
z
s
s
z
21
18

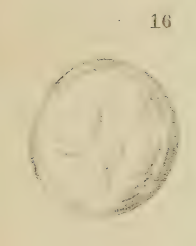
15



17

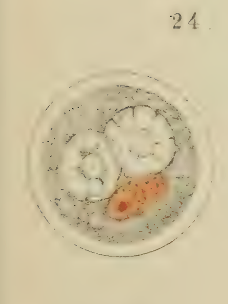


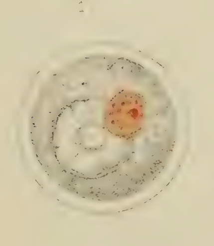
16





24





22



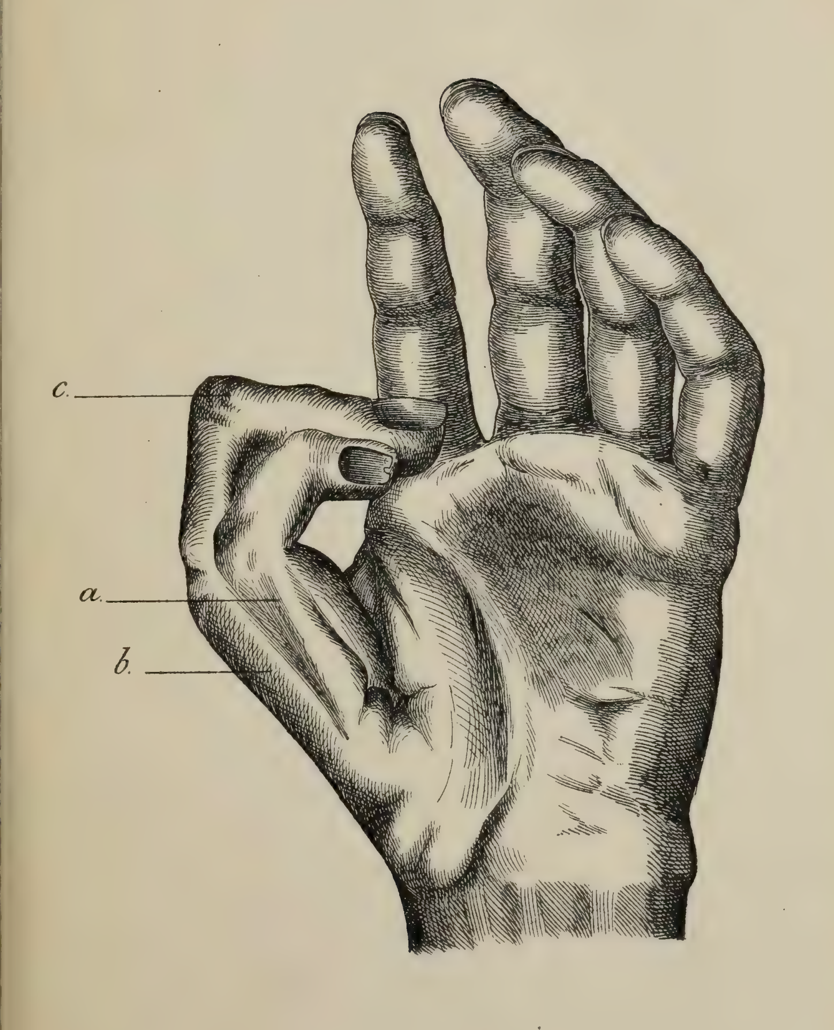
25

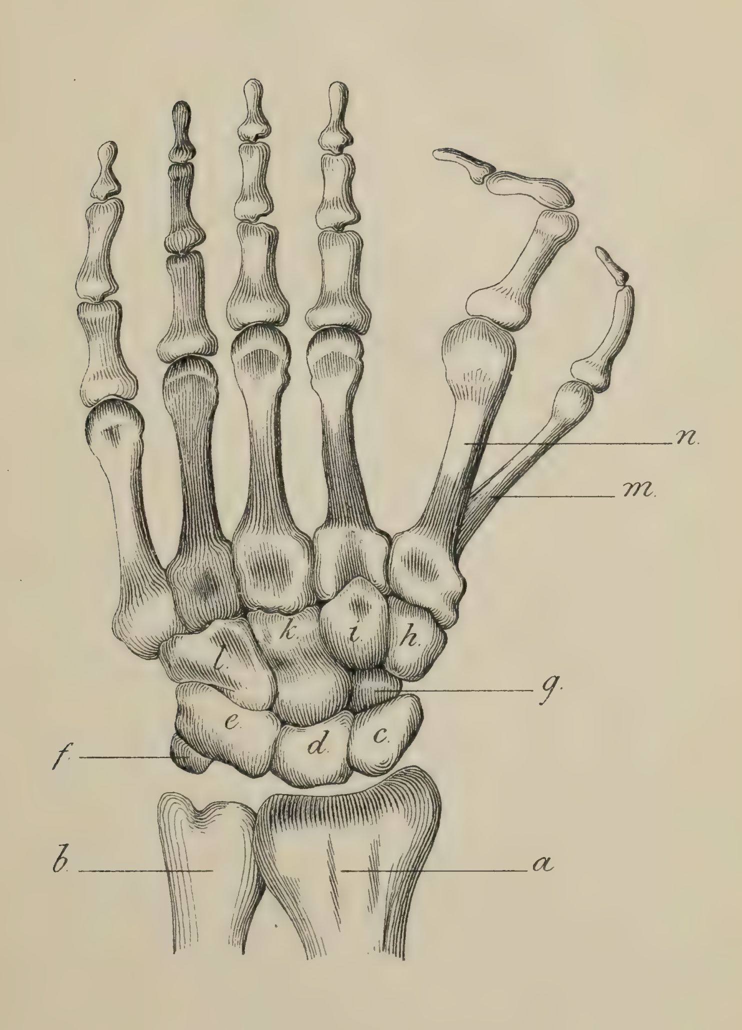




ILE DE JAVA.
Echelle 1:6000000
● Localités où ont été trouveés des météorites.
1. Prambanan.
2. Tjabé.
3. Bandong.
4. Ngawi.
5. Djati Pengilon.
Batavia
3 ● Bandong
Samarang
Djati Pengilon
Gentoeng
Kedoeng Poetri
Solo
1 Prambanan
2 Tjabé
Soerabaja
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114 Long E: de Gr: 115
5
6
7
8
9
Lat: S:

Fig. I




n.
m.
k.
i.
h.
l.
g.
e.
c.
d.
f.
b
a

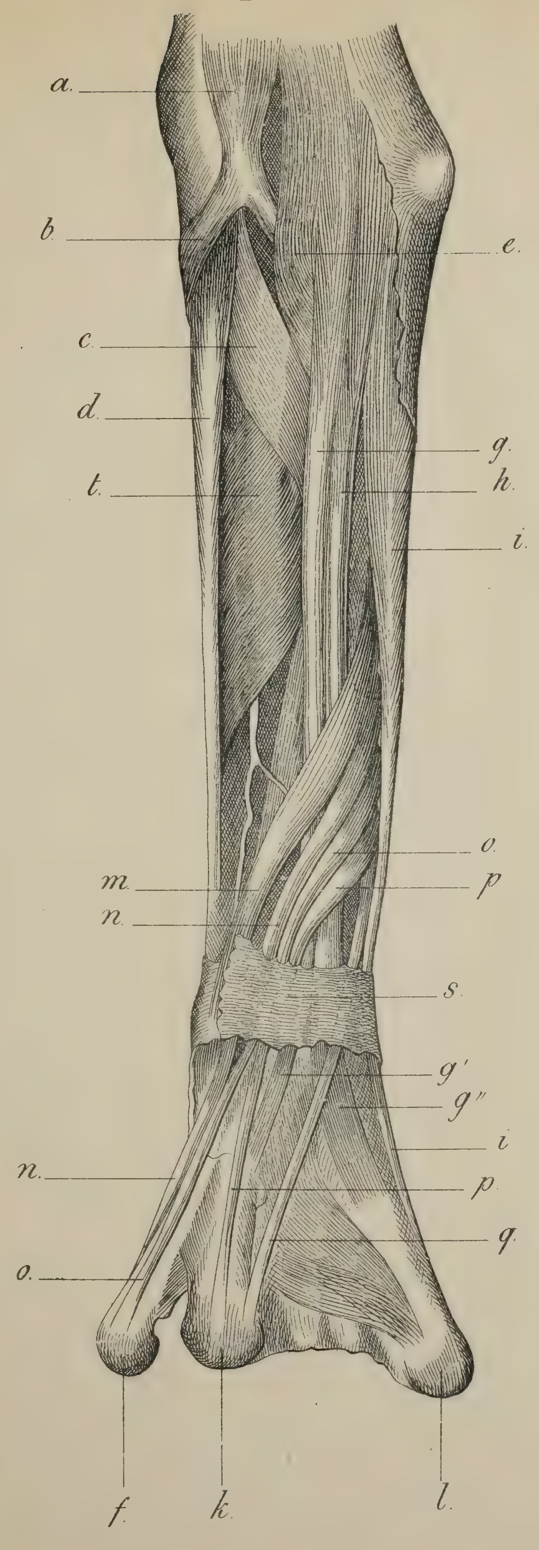
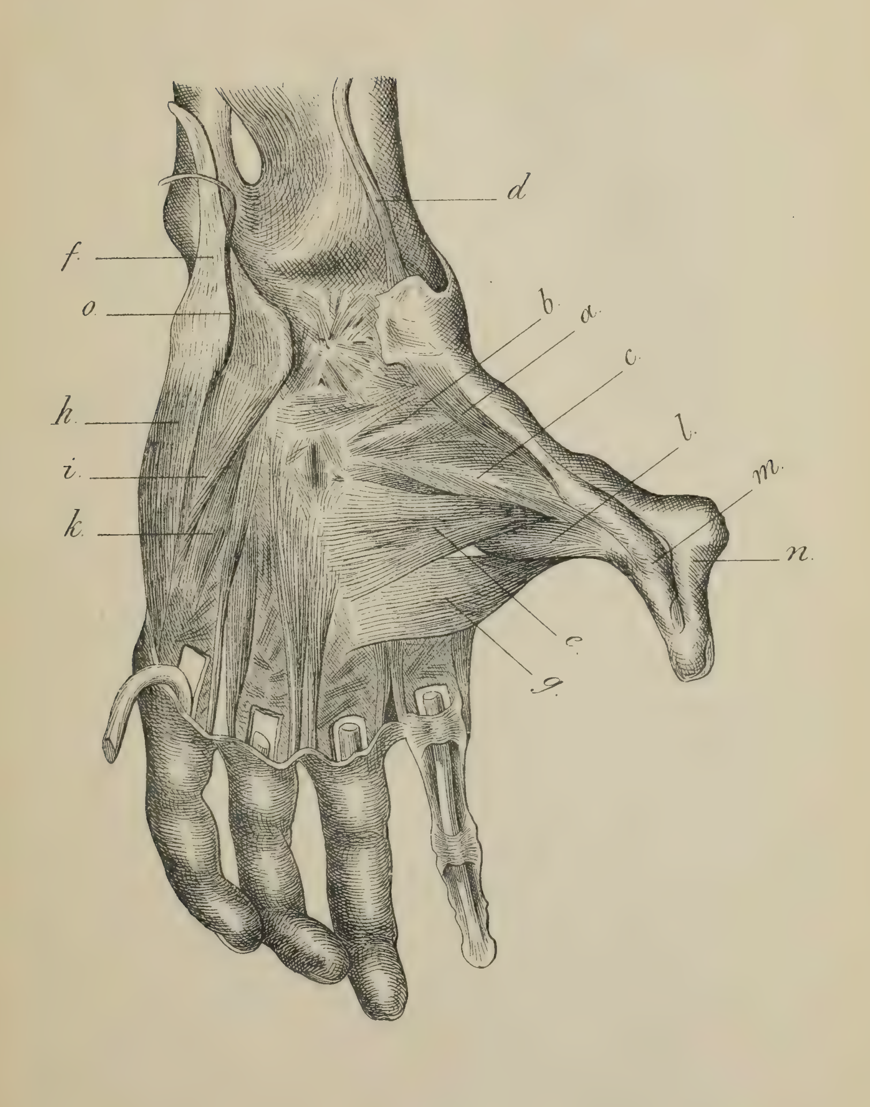

a.
b.
c.
d.
t.
e.
g.
h.
i.
o.
p
m.
n.
s.
g'
g''
i
n.
p.
q.
o.
f.
k.
l.

Fig. IV.



DEUXIÈME ET TROISIÈME LIVRAISONS.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Un certain nombre de collections des tomes I à XX (années 1866—1886) sont mises à la disposition des Savants, Bibliothèques ou Etablissements publics au prix de 80 florins (168 francs, 134 Reichsmark). S'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des Sciences à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

TOME XXII. 4me et 5me Livraisons.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

J. BOSSCHA,

SECRÉTAIRE DE LA SOCIÉTÉ,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot, C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1888.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

SUR LA PAROI DES CELLULES SUBÉREUSES,

PAR

C. VAN WISSELINGH.

Introduction.

Nonseulement, à maintes reprises déjà, le liège a été étudié avec soin, dans différentes directions, tant par les botanistes que par les chimistes, mais plusieurs des Mémoires qui lui ont été consacrés, tels que ceux de von Mohl [1]), *Untersuchungen über die Entwicklung des Korkes und der Borke auf der Rinde der baumartigen Dikotylen*, de Sanio [2]), *Ueber den Bau und die Entwicklung des Korkes*, et surtout de von Höhnel [3]), *Ueber den Kork und verkorkte Gewebe überhaupt*, ont acquis une célébrité bien capable de retenir les observateurs tentés de choisir ce tissu pour objet de nouvelles recherches. Que, néanmoins, de pareilles recherches aient été entreprises par l'auteur du présent Mémoire, cela s'explique par la circonstance suivante. Relativement à la structure de la paroi subéreuse jeune,

1) *Vermischte Schriften*, p. 212 et suiv.

2) Pringsheim's *Jahrb.*, II, p. 39 et suiv. -- Les recherches de cet auteur ont été soumises à un contrôle attentif par M. Rauwenhoff, dont le travail, *Observations sur les caractères et la formation du liège dans les Dicotylédones* (*Arch. Néerl.*, T. V, 1870), a complètement confirmé les principaux résultats obtenus par M. Sanio.

3) *Sitzungsber. d. Wiener Akad.*, 1877, 76. B., p. 507 et suiv.

M. von Höhnel [1]), dans son Mémoire ci-dessus cité, s'exprime en ces termes: „Si intéressant et si important qu'il eût été de fixer le rapport existant, en général, entre les couches discernables dans les cellules subéreuses jeunes et celles qui constituent la paroi des cellules du liège complètement formées, je dois m'en tenir, en partie pour les raisons déjà indiquées, à la considération de la structure du tissu adulte." C'est ce passage qui, ayant attiré mon attention sur une lacune encore existante dans notre connaissance du tissu subéreux, a déterminé le choix du sujet de mes recherches.

Avant de pouvoir aborder l'examen de la paroi des cellules subéreuses jeunes, il était nécessaire d'étudier, suivant les méthodes indiquées par M. von Höhnel, la paroi cellulaire adulte. Bien que cette étude ait confirmé, dans presque tous leurs détails, les résultats des observations de M. von Höhnel, des doutes s'élevèrent au sujet de quelques-unes des conclusions qu'il en avait tirées, par exemple, au sujet du contenu en cellulose de la lamelle subéreuse. Pour arriver à une solution tant soit peu satisfaisante des questions qui se présentaient, de nouvelles méthodes d'examen furent cherchées et d'autres tissus furent soumis à une étude comparative. A mon grand regret, je me trouve empêché pour le moment de continuer ces recherches, qui ne sont pas encore achevées dans toutes leurs parties, de sorte que je dois provisoirement me borner à parler, presque exclusivement, des résultats obtenus par l'étude de la lamelle subéreuse dans la paroi cellulaire adulte.

I. Structure générale et principes constitutifs chimiques de la paroi des cellules subéreuses.

Dans la paroi des cellules subéreuses on peut en général distinguer, suivant M. von Höhnel [2]), trois parties différentes:

1) *l.c.*, p. 561.

2) *l.c.*, p. 529, 530, 568 et 569.

la paroi cellulosique (*Celluloseschlauch*), la lamelle subéreuse (*Suberinlamelle*) et la lamelle moyenne (*Mittellamelle*). De part et d'autre de la lamelle moyenne, toujours commune à deux cellules, se trouve la lamelle subéreuse, qui enveloppe la partie la plus interne de la paroi, la paroi cellulosique. Selon M. von Höhnel [1]), chacune de ces trois parties possède une base cellulosique (*Cellulosegrundlage*), assertion qui toutefois, en ce qui concerne la lamelle subéreuse, m'a laissé des doutes. Ce point sera traité en détail plus loin, aux Chapitres 3, 4 et 5. La paroi cellulosique est généralement lignifiée à un degré plus ou moins avancé. La lamelle subéreuse est le siège de la substance caractéristique pour la paroi des cellules du liège: la subérine. La lamelle moyenne a d'ordinaire subi une forte lignification, et dans certains cas M. von Höhnel [2]) l'a vue localement subérifiée. Au Chapitre 7, je reviendrai sur ce point. Parfois, l'on pourrait encore distinguer dans la paroi subéreuse une quatrième partie, savoir une mince lamelle, comprise entre la lamelle subéreuse et la paroi cellulosique, et à laquelle M. von Höhnel [3]) donne le nom de lamelle intermédiaire (*Zwisschenlamelle*); cette lamelle, toutefois, peut tout aussi bien être regardée comme une subdivision de la paroi cellulosique, dont, en général, elle diffère surtout par une lignification plus prononcée. La paroi cellulosique et la lamelle subéreuse sont, l'une et l'autre, d'épaisseur très variable et souvent développées plus fortement d'un seul côté, la première généralement du côté de la paroi interne, la seconde du côté de la paroi externe. La lamelle moyenne ne présente d'ordinaire qu'une faible épaisseur.

Les parois subérifiées et les parois fortement lignifiées se comportant d'une manière très analogue vis-à-vis de l'acide sulfurique et des réactifs iodés, il était impossible autrefois, alors qu'on ne leur connaissait pas de réactions spéciales, de

[1]) *l.c.*, p. 530 et ailleurs.

[2]) *l.c.*, p. 565 et 566.

[3]) *l.c.*, p. 568.

les distinguer les unes des autres. M. von Höhnel, qui nous a appris à voir dans la subérine une matière servant, tout aussi bien que la cellulose et la lignine, à édifier la paroi cellulaire, a donné les moyens de distinguer nettement entre elles les parties lignifiées et les parties subérifiées de la paroi et de déceler sûrement des quantités même très faibles de subérine [1]). En premier lieu, il indique à cet effet l'emploi de la potasse caustique. Lorsqu'à une coupe de l'un ou l'autre tissu subéreux, on ajoute une solution concentrée de potasse, on observe bientôt que la lamelle subéreuse prend une teinte jaune; chauffe-t-on doucement, cette couleur augmente d'intensité, et en même temps la lamelle subéreuse, primitivement tout à fait lisse, acquiert un aspect caractéristique. Elle est plus ou moins gonflée et présente une structure granuleuse ou fibreuse. Si l'on continue à chauffer jusqu'à ébullition, elle se transforme en masses jaunes, granuleuses ou fibreuses, ou en boules possédant une membrane plissée, qui, selon M. von Höhnel, représente une enveloppe (*Membranhülle*) (voir Pl. X, fig. 2 *s*); outre ces boules et ces masses, on voit souvent apparaître aussi des granules isolés. La formation de boules à membrane plissée a été observée surtout chez les lamelles subéreuses minces, celle de masses granuleuses ou fibreuses surtout chez les lamelles épaisses. Si on lave la coupe à l'eau, la couleur jaune ne tarde pas à disparaître, ce qui s'accompagne manifestement de la dissolution d'une portion des boules ou masses, dont la forme, toutefois, n'éprouve généralement que peu ou point d'altération.

Tels sont les caractères généraux de la réaction par la potasse. Quant aux modifications qu'elle affecte chez des plantes différentes, nous ne nous y arrêterons pas; je ferai seulement remarquer que M. von Höhnel regarde comme cause de ces divergences accessoires, outre une inégalité dans la résistance de la subérine à l'action de la potasse chaude,

---

[1]) *l.c.*, p. 522 et suiv.

les différences que la lamelle subéreuse présente sous le rapport de la distribution de la cellulose et de la subérine. Dans certains cas il a trouvé ces matières uniformément mêlées sur toute l'épaisseur de la lamelle subéreuse, dans d'autres cas il a observé des couches successives, alternativement plus riches en cellulose ou en subérine.

En second lieu, M. von Höhnel recommande, comme réactif de la subérine, le mélange de Schultze: chlorate de potasse et acide nitrique. En chauffant une coupe avec ce réactif on voit s'accuser de plus en plus distinctement les parties subérifiées, tandis que les parois formées de cellulose et les parois lignifiées deviennent de plus en plus transparentes. Les lamelles subéreuses minces, en outre, contractent d'ordinaire des courbures variées. Continue-t-on à chauffer, les parties pariétales subérifiées commencent à fondre et à confluer, jusqu'à ce que finalement elles soient transformées en boules homogènes. Cette réaction, appelée par M. von Höhnel réaction de l'acide cérinique, est extrêmement caractéristique et mérite surtout d'être recommandée pour la détection de minimes quantités de subérine.

Le troisième et dernier réactif que M. von Höhnel nous a fait connaître pour les parois subéreuses est l'acide chromique, qu'il emploie en solution concentrée. A la température ordinaire, les parties subérifiées offrent une résistance opiniâtre à l'action de ce réactif, tandis que les parois composées de cellulose et de lignine sont très rapidement dissoutes (voir fig. 1). Se fondant sur des recherches dont nous reparlerons plus loin, M von Höhnel [1]) pense que, peu à peu, la lamelle subéreuse abandonne au liquide une partie de sa subérine, qu'ensuite c'est surtout la cellulese qui se dissout, et que la portion la moins attaquable de la subérine demeure comme résidu. Dans cette inégalité de résistance à l'action de l'acide chromique, M. von Höhnel, toutefois, ne croit pas trouver

[1]) *l.c.*, p. 554 et 555.

une raison suffisante pour admettre l'existence de plusieurs modifications de la subérine, qui différeraient l'une de l'autre sous quelque rapport essentiel.

Chez le *Callistemon*, M. von Höhnel [1]) a rencontré un phénomène particulier. Les lamelles subéreuses, après une courte macération dans l'acide chromique, d'une heure environ, se montraient gonflées et distendues par des bulles qui s'y étaient formées. Ce phénomène ne se produisait, toutefois, que dans la partie interne de la lamelle subéreuse; la partie externe restait parfaitement lisse et se comportait de la manière ordinaire. Au bout de quelque temps la première était complètement dissoute, tandis que la seconde continuait de résister à l'action du liquide. Un phénomène analogue a été observé par moi chez le *Betula alba.* Dans ce cas également, la partie interne de la lamelle subéreuse était dissoute par l'acide chromique avec une facilité relative, tandis que la partie externe persistait sous la forme d'une lamelle mince et entièrement lisse (voir fig. 1J).

Lorsque l'acide chromique est appliqué à chaud, les phénomènes offerts par la lamelle subéreuse sont tout autres qu'à la température ordinaire. Chez le liège à bouchons [2]), la paroi cellulosique et la lamelle moyenne sont promtement dissoutes, tandis que les lamelles subéreuses éprouvent un gonflement bulleux et confluent en masses irrégulières, qui, après refroidissement, sont très fragiles. En continuant à chauffer, on détermine la dissolution complète de la lamelle subéreuse.

Si nous devons à M. von Höhnel des réactions caractéristiques pour la subérine, M. Kügler [3]) nous a donné plus de certitude concernant la nature chimique de cette substance. Le premier

---

1) *l.c.*, p. 555.

2) Von Höhnel, *Einige Bemerkungen über die Cuticula*, dans *Oesterr. Bot. Zeitschr.*, n°. 3, März 1878, p. 84.

3) *Ueber den Kork von Quercus Suber*, dans *Archiv. d. Pharm.*, 3. Reihe, 22. B. 6. Heft, p. 215 et suiv.

avait déjà présumé qu'elle se rapprochait des graisses, la réaction avec la potasse lui paraissant être une sorte de saponification ; le second, dans ses analyses du liège à bouchons, a réussi à obtenir entre autres, outre la glycérine, de l'acide stearique et un nouvel acide gras, l'acide phellonique, d'où l'on doit conclure que la subérine fait partie du groupe des matières grasses.

II. Sur la présence de la cire dans la paroi des cellules subéreuses.

En plus de la subérine et de la cellulose, M. von Höhnel [1]) est parvenu à constater, dans la lamelle subéreuse, en divers cas l'existence de l'acide silicique et chez *Salix* celle de la cire. Rappelons que sous la dénomination de „cire" on désigne, en général, les combinaisons du carbone qui par leurs propriétés physiques, telles que la fusibilité au-dessous de 100°, la solubilité, etc., ressemblent aux espèces de cires dont nous avons une connaissance plus exacte [2]). C'est dans cette acception générale que le mot cire est employé ci-dessus. Bien que M. von Höhnel ait recherché la cire dans quantité de tissus subéreux, d'après la méthode recommandée par M. de Bary et consistant à chauffer modérément de minces coupes immergées dans l'eau, il n'a pu en démontrer la présence que chez le genre de plantes nommé plus haut. Moi aussi j'ai étudié sans succès, sous ce rapport, un grand nombre de tissus subéreux; mais pourtant il ne me semble pas que l'existence de la cire, dans les parois des cellules du liège et d'autres tissus analogues, soit une rareté si grande. En suivant la méthode précitée, j'ai trouvé cette substance, en quantité relativement considérable, dans trois tissus subéreux, savoir chez *Salix caprea*, *Pirus Malus* et *Syringa vulgaris;* les deux premières de ces plantes possèdent une lamelle

---

1) *Ueber den Kork* etc., p. 577 et 578.

2) De Bary, *Vergl. Anatom.*, p. 86.

subéreuse épaisse, la dernière une lamelle mince. Dans quelques autres cas, parmi lesquels il y avait aussi des endodermes et des gaînes de cylindre central, la cire ne fut rencontrée qu'en quantité à peine appréciable; par contre, dans l'endoderme de l'*Hemerocallis Kwanso*, composé de plusieurs assises de cellules, elle fut de nouveau trouvée en proportion assez notable. Dans tous ces cas, la lamelle subéreuse en était le siège. Après chauffage dans l'eau jusqu'à 100°, la cire apparaît ordinairement sous forme de gouttelettes plus ou moins grosses (fig. 5 w), qui sont attachées à la lamelle subéreuse. Pour mettre ce fait encore mieux en évidence, on n'a qu'à traiter par l'acide chromique les coupes chauffées; la lamelle subéreuse reste alors avec les gouttelettes de cire adhérentes, d'où ressort en même temps leur résistance à l'action du réactif (voir fig. 6). Par la compression, les gouttelettes de cire perdent d'une façon durable leur forme sphérique, preuve qu'elles sont à l'état solide. En plongeant avec précaution les lamelles, préalablement chauffées sous l'eau, dans l'alcool, l'éther ou le chloroforme portés à la température de l'ébullition, on peut se convaincre de la solubilité des gouttelettes cireuses. A la température ordinaire, elles ne sont pas sensiblement attaquées par une solution concentrée de potasse, même après une action prolongée. Elles se montrent également indifférentes en présence de l'acide sulfurique concentré. Avec l'iode ou le chlorure de zinc iodé, elles prennent une couleur jaune très claire.

III. Le contenu cellulosique de la lamelle subéreuse.

Il a déjà été dit que, suivant M. von Höhnel, les deux éléments principaux de la lamelle subéreuse sont la cellulose et la subérine. Dans le présent Chapitre, nous allons examiner les observations qui ont conduit ce savant [1]) à conclure que

[1]) *l. c.* p. 542 et suiv.

la lamelle subéreuse possède une base cellulosique. La première mention que nous trouvons à cet égard, dans son volumineux Mémoire, est relative au *Quercus Suber*. Pour les soi-disant enveloppes (*Membranhülle*, *Hüllhaute*), qui dans ce cas naissent de la lamelle subéreuse lors de la réaction par la potasse, il rapporte que, soumises pendant 24 à 48 heures à l'influence du chlorure de zinc iodé, elles présentent la réaction de la cellulose. En outre, après avoir séparé les lamelles subéreuses au moyen de la macération durant 40 à 48 heures dans l'acide chromique, il a réussi à les colorer par le chlorure de zinc iodé en violet rougeâtre. La macération dans la potasse, continuée pendant trois jours, suffisait également pour que, après un lavage prudent, les lamelles et granules provenus de la lamelle subéreuse prissent par le chlorure de zinc iodé une coloration violette. Non-seulement chez *Quercus Suber*, mais aussi chez bon nombre d'autres plantes, M. von Höhnel déclare avoir pu provoquer, sur la lamelle subéreuse, préalablement traitée d'une des trois manières susdites, la réaction cellulosique au moyen du chlorure de zinc iodé. Presque toujours il obtint ainsi une coloration violette ou violet rougeâtre, jamais un bleu pur; dans une couple de cas seulement, notamment chez *Pirus Malus* [1]), il vit, après 24 heures de macération dans l'acide chromique, apparaître une coloration violet bleuâtre, ce qui indiquerait une proportion très élevée de cellulose. Chez *Lycium barbarum* et *Corylus Avellana* il est également attribué à la lamelle subéreuse un fort contenu en cellulose, parce que les enveloppes formées lors de la réaction potassique se colorent instantanément en violet rougeâtre sous l'influence du chlorure de zinc iodé [2]).

L'apparition de la réaction de la cellulose, après addition de chlorure de zinc iodé, est évidemment considérée par M. von Höhnel comme la conséquence d'un enlèvement, sinon

---

[1]) *l.c.*, p. 547.

[2]) *l.c.*, p. 548.

complet, au moins partiel de la subérine. Les enveloppes qui se forment lors de la réaction potassique sont décrites, par exemple chez *Quercus*, comme des lamelles de cellulose; là où, par suite de la macération dans la potasse, une structure lamelleuse devient visible dans la lamelle subéreuse, il est également parlé de lamelles cellulosiques, ou de lamelles constituées principalement ou presque entièrement par la cellulose. En ce qui concerne la macération dans l'acide chromique, M. von Höhnel [1]) admet qu'elle enlève d'abord de la subérine à la lamelle subéreuse, et ensuite surtout de la cellulose, tandis que la portion la moins attaquable de la subérine continue à résister. Cette manière de voir s'appuie sur le phénomène suivant, observé par M. von Höhnel. Après une courte action de l'acide chromique, les lamelles subéreuses sont colorées en jaune par le chlorure de zinc iodé; après une action plus prolongée (12 à 50 heures) elles donnent la coloration violette ci-dessus mentionnée, et si la macération continue elles finissent par reprendre une teinte jaune, peu intense, il est vrai. Pour prouver encore mieux l'existence de la cellulose dans les lamelles subéreuses, M. von Höhnel [2]) a essayé d'extraire cette substance, au moyen de la solution d'oxyde de cuivre ammoniacale, des lamelles subéreuses traitées par la potasse et offrant la réaction de la cellulose. L'expérience lui donna pour résultat que la base cellulosique de la lamelle subéreuse est soluble dans la solution d'oxyde de cuivre ammoniacale, puisque, après traitement suffisant par ce liquide, la réaction de la cellulose ne se produisait plus ou était devenue incertaine. Tels sont, brièvement résumés, les faits sur lesquels M. von Höhnel fonda la conclusion que la lamelle subéreuse contient de la cellulose.

J'ai répété sur une dizaine de plantes les recherches de M. von Höhnel concernant la teneur en cellulose de la la-

---

1) *l.c.*, p. 554.

2) *l.c.*, p. 552 et 553.

melle subéreuse; ces plantes sont: *Quercus Suber*, *Sambucus nigra*, *Populus pyramidalis*, *Syringa vulgaris*, *Cytisus Laburnum*, *Virgilia lutea*, *Fagus silvatica*, *Betula alba*, *Pirus Malus* et *Salix caprea*. Chez toutes, à l'exceptior de la dernière, j'ai pu, après avoir traité la lamelle subéreuse de l'une des trois manières indiquées, faire apparaître par le chlorure de zinc iodé une coloration violette. Chez *Salix caprea*, l'expérience me réussit bien avec les lamelles subéreuses minces, mais nullement avec les épaisses parois tangentielles. M. von Höhnel [1]) également, chez *Salix purpurea* et *fragilis*, a essayé sans succès de produire la coloration violette sur la lamelle subéreuse; il croit néanmoins devoir admettre pour elle, même dans ces deux cas, un contenu cellulosique.

Après chauffage avec la potasse et lavage par l'eau, les restes de la lamelle subéreuse furent même, dans maints cas, colorées immédiatement en beau violet par le chlorure de zinc iodé; cela eut lieu, par exemple, chez *Virgilia lutea*, *Fagus silvatica*, *Betula alba* et *Populus pyramidalis*, et j'ai aussi pu l'observer parfois chez *Quercus Suber*. Dans les expériences de M. von Höhnel, la coloration violette n'était obtenue, en général, que lorsqu'il avait laissé agir le chlorure de zinc iodé pendant 24 heures. Même après macération dans la potasse froide, durant quelques jours ou quelques semaines, j'ai réussi à provoquer chez la lamelle subéreuse, par le chlorure de zinc iodé, une coloration violette ordinairement très belle. Bien que de légères modifications s'observent dans la teinte violette, il est à remarquer que celle-ci se distingue toujours nettement de la couleur bleue prise, sous l'influence du chlorure de zinc iodé, par les parois cellulosiques; la différence est frappante surtout pour les lamelles subéreuses épaisses (voir fig. 23). Tandis que les parois de cellulose se colorent en bleu pur, et ne prennent une couleur violette qu'en cas d'action insuffisante du réactif, la couleur de la lamelle subéreuse, si régulièrement

---

[1]) *l.c.*, p. 553 et 554.

que la réaction s'accomplisse, n'approche jamais de celle des parois cellulosiques, même quand son intensité est à peu près égale. C'est cette différence de teinte qui m'a conduit à étudier de plus près les soi-disant enveloppes formées lors du chauffage avec la potasse et les minces feuillets en lesquels la lamelle subéreuse se divise par la macération dans la potasse froide. J'ai trouvé ainsi, entre autres résultats, que les enveloppes et feuillets en question opposent une résistance opiniâtre à l'action d'une solution concentrée d'acide chromique, raison pour laquelle je puis difficilement y reconnaître des parties constituées, exclusivement ou essentiellement, par la cellulose. La fig. 4 représente différentes lamelles subéreuses du *Syringa vulgaris*, fendues en feuillets ou lamelles plus minces par la macération dans la potasse et séparées au moyen de l'acide chromique; la fig. 2 (voir lettre *s*) montre les soi-disant enveloppes, qui me paraissent n'être que des fragments recroquevillés de la lamelle subéreuse.

J'ai aussi examiné, chez les dix plantes précitées, la manière dont la lamelle subéreuse se comporte vis-à-vis du chlorure de zinc iodé après une macération plus ou moins longue dans l'acide chromique. De même que M. von Höhnel, je suis arrivé à ce résultat, qu'après une action de peu de durée les lamelles subéreuses sont colorées en jaune ou en brun, après une action plus prolongée en violet, et finalement en jaune très clair. Il n'y a d'exception à cet égard que pour les épaisses parois tangentielles du *Salix caprea*, chez lesquelles on observe toujours une couleur jaune (voir fig. 26). La coloration violette (voir fig. 20) est semblable à celle que nous obtenons après chauffage ou macération dans la potasse. Le *Quercus Suber* me paraît être un sujet favorable pour l'étude de l'action de l'acide chromique. Primitivement, les lamelles subéreuses séparées par cet acide se colorent en brun sous l'influence du chlorure de zinc iodé; après une action plus prolongée de l'acide chromique, on peut, en outre de la couleur brune, reconnaître une teinte violette, qui, la macération

continuant, devient plus distincte, tandis que la couleur brune s'efface de plus en plus; enfin, on obtient une belle couleur violette, laquelle, à mesure que le traitement par l'acide chromique se prolonge davantage, apparaît avec une intensité toujours moindre, pour faire place finalement à une teinte jaune clair. En ce qui concerne la durée de la macération je ne donnerai pas d'indications spéciales, cette durée dépendant en premier lieu de la force de la solution d'acide chromique; je ferai seulement remarquer que le traitement par cet acide, malgré des renouvellements répétés, doit être continué longtemps (3 à 4 semaines), avant que la coloration violette cesse de se produire.

Un point sur lequel je dois particulièrement attirer l'attention, c'est que dans les expériences ci-dessus décrites on peut, au lieu d'une solution de chlorure de zinc iodé, employer aussi, pour faire apparaître la coloration violette, une solution d'iodure de potassium ioduré. La couleur que ce dernier réactif provoque chez la lamelle subéreuse ressemble complètement à celle qui résulte de l'action du premier. La solution d'iodure de potassium ioduré, dont j'ai fait usage, avait été préparée par moi peu de temps avant l'emploi; elle était incapable de déterminer aucune espèce de coloration dans les parois cellulosiques, tandis qu'elle colorait très rapidement en violet les lamelles subéreuses, après un traitement suffisant par l'acide chromique. Les feuillets en lesquels se divise la lamelle subéreuse soumise à l'action de la potasse à froid, ainsi que les masses granuleuses ou fibreuses et les soi-disant enveloppes qui se forment sous l'influence de la potasse à chaud, n'ont été examinées par l'iodure de potassium ioduré que dans un petit nombre de cas; la raison en est que les parois cellulosiques, préalablement traitées par la potasse, manifestent déjà en présence de l'iodure de potassium ioduré la réaction de la cellulose, de sorte que la coloration violette de la lamelle subéreuse n'autorise pas, en ce cas, une conclusion négative quant à l'existence de la cellulose. A en juger d'après les résultats

obtenus avec la solution d'iodure de potassium ioduré, la coloration violette déterminée de l'une ou de l'autre manière chez la lamelle subéreuse ne peut être expliquée par la présence de la cellulose, car alors elle ne pourrait pas apparaître, après macération dans l'acide chromique, sous l'influence de l'iodure de potassium ioduré; nous manquons donc de raisons suffisantes pour admettre que la lamelle subéreuse possède une base cellulosique. Afin d'acquérir plus de certitude à cet égard, j'ai cherché quelque moyen d'enlever complètement la subérine à la paroi cellulaire et d'obtenir, éventuellement, la base cellulosique à l'état de pureté, ce qui jusqu'ici n'a encore réussi à personne. Dans le Chapitre suivant sera décrite une méthode qui, entièrement nouvelle, à ce que je crois, fournit des résultats dignes de confiance, en même temps qu'elle met au jour plusieurs faits intéressants, relatifs à la subérine.

IV. Manière dont la lamelle subéreuse se comporte à une température élevée.

Pour la connaissance et la distinction des corps, une grande importance est attachée par les chimistes à la détermination de la température où ces corps passent d'un état d'agrégation à un autre, ainsi que de celle où ils se decomposent. Or, comme M. Kügler a séparé de la lamelle subéreuse des acides gras et de la glycérine, que les graisses ont en général un point de fusion relativement bas et qu'elles se décomposent ordinairement entre 260 et 300°, je pensai qu'il y aurait de l'intérêt à chercher comment la lamelle subéreuse sa comporte à cette température. En chauffant sur des lames de verre, au contact de l'air atmosphérique, des coupes préalablement desséchées, j'éprouvai des difficultés de divers genres; l'action décomposante de l'oxygène de l'air, surtout, était gênante. Pour parer à ces inconvenients, j'exécutai le chauffage dans un liquide, en employant comme tel la gly-

cérine, la seule matière qui me paraisse convenir pour cet usage. Elle empêche suffisamment le contact de l'air atmosphérique. Vu son point d'ébullition élevé, elle permet de porter la température jusqu'à 290° C. Sa solubilité dans l'eau fait que les coupes peuvent, plus tard, en être facilement débarrassées. Bien que jouissant en général d'un grand pouvoir dissolvant, elle laisse intactes les matières grasses, de sorte que, en supposant par exemple la fusion de la lamelle subéreuse, nous retrouverions très probablement celle-ci à l'état de masse fondue. La chaleur ne peut être poussée au-delà de 290° C, parce qu'à cette température la glycérine commence à bouillir et prend en outre, par suite de décomposition partielle, une couleur brun foncé. La glycérine du commerce contenant toujours de l'eau, j'eus soin, avant de m'en servir, de la concentrer par l'ébullition, afin de prévenir autant que possible, durant le chauffage, l'ébullition du liquide et le refroidissement auquel donnerait lieu la vaporisation de quantités d'eau relativement grandes.

Il faut noter, comme l'un des principaux avantages de cette méthode, que par son emploi les parois cellulosiques ne sont modifiées qu'assez légèrement, ce qui augmente la chance de mettre à nu, si elle existe, la base cellulosique de la lamelle subéreuse. Avant et après le chauffage, les parois de cellulose se comportent d'une manière analogue vis-à-vis des réactifs iodés et des acides forts. Il en est de même des parois lignifiées, lorsque le chauffage n'a pas duré très longtemps. En cas d'application plus prolongée de la chaleur, une assez notable quantité de lignine est enlevée à la paroi cellulaire, et l'on réussit alors parfois à obtenir la réaction de la cellulose. Nous allons maintenant passer en revue, chez les dix plantes déjà nommées, les changements subis, lors du chauftage, par la lamelle subéreuse. Préalablement, toutefois, je ferai quelqus remarques générales, et en premier lieu celle-ci, que je n'ai jamais observé une fusion de la lamelle subéreuse. Dans les cas seulement où

cette lamelle contient une soi-disant cire, celle-ci fond déjà au-dessous de 100° et apparaît alors ordinairement à la surface de la lamelle subéreuse sous la forme de globules plus ou moins gros, qui souvent y restent encore attachés lorsqu'on chauffe plus fortement. Au-delà de 230°, il se produit dans la lamelle subéreuse des phénomènes qui ne peuvent être expliqués qu'en admettant que la subérine éprouve, au-dessus de cette température, une décomposition. En ce qui concerne la manière dont les coupes furent étudiées après le chauffage, je dirai que pour la recherche de la lamelle subéreuse, ou de ses restes, il fut fait usage soit du mélange de Schultze (chlorate de potasse et acide nitrique), soit de l'acide chromique; le premier surtout me rendit de bons services pour la détection de petites quantités de subérine. Les restes de la lamelle subéreuse, après le chauffage, offrant parfois peu de résistance vis-à-vis du second des deux réactifs en question, j'ai souvent aussi procédé de la manière suivante. Les coupes étaient plongées quelque temps dans une solution étendue d'acide chromique, pour les débarrasser de lignine et de contenu coloré en brun; on les lavait alors avec précaution, puis les restes de la lamelle subéreuse étaient colorés en jaune ou en brun par l'iode, ou bien isolés au moyen de l'acide sulfurique, qui dissolvait les parois cellulosiques. Cette dernière méthode a l'avantage que la subérine encore contenue dans la lamelle n'est pas exposée, de la part de l'acide chromique, à une action aussi forte que lorsque ce réactif est employé exclusivement. Quand, chez des lamelles subéreuses épaisses, on avait réussi par le chauffage à enlever la totalité ou une partie de la subérine, la base cellulosique y était recherchée au moyen du chlorure de zinc iodé, ou au moyen de l'iode et de l'acide sulfurique un peu dilué (à environ 80%).

Si l'on chauffe jusqu'à 260° C, de la manière qui a été décrite, des coupes de *Quercus Suber*, et qu'ensuite, après avoir enlevé la glycérine par l'eau, on les traite par l'acide chromi-

que ou par le mélange de Schultze, on reconnaît que la lamelle subéreuse n'a pas encore subi de modification notable; mais sous l'influence d'une chaleur plus forte, elle diminue beaucoup d'épaisseur. A une température de 280° ou 290°, la plupart des lamelles subéreuses sont devenues si minces qu'il est difficile de les retrouver. Seules les plus épaisses, qui sont disposées en rangées entre les autres, apparaissent distinctement lors du traitement par l'acide chromique. Pendant le chauffage avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique, on ne voit se former, dans la plupart des cellules, que de très petits globules d'acide cérinique; une réaction forte ne se produit que chez les lamelles subéreuses épaisses. Les résultats obtenus dans les expériences décrites plus haut ne donnent pas de réponse à la question du contenu cellulosique de la lamelle subéreuse, vu qu'il a été impossible d'extraire toute la subérine de la paroi cellulaire. En ce qui concerne le processus déterminé par le chauffage même, je crois devoir admettre qu'il consiste en une décomposition de la subérine, et cela parce que la température à laquelle cette matière disparaît de la paroi cellulaire coïncide avec celle où se décomposent les graisses en général. La circonstance qu'une partie seulement de la subérine est enlevée à la paroi cellulaire, tandis qu'une autre partie résiste encore à 290°, mérite d'être remarquée; elle tend à faire supposer que la subérine du *Quercus Suber* est constituée non par un seul corps chimique, mais par deux ou plusieurs matières différentes.

Les cellules du *Sambucus nigra* possèdent, comme celles du *Quercus Suber*, une lamelle subéreuse mince et développée uniformément sur toute son étendue. Après chauffage à 230°, il n'y a encore à constater, par l'acide chromique, aucun changement dans cette lamelle. En continuant à chauffer jusqu'à 240 ou 245°, on remarque dans différentes cellules que la paroi cellulosique, mince et lignifiée, s'est écartée du reste de la paroi; après addition d'acide chromique, la lamelle subéreuse commence à se courber et devient par suite nettement

visible, tandis que les parties pariétales voisines sont dissoutes. On peut observer aussi, surtout lorsque l'acide chromique a été enlevé par l'eau, que la lamelle est devenue, sauf aux angles, notablement plus mince. Ce même fait se laisse constater après macération dans l'acide chromique étendu, lavage par l'eau et traitement par l'acide sulfurique ou coloration par l'iode. Après chauffage avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique, on trouve entre la lamelle moyenne et la paroi cellulosique de nombreux globules d'acide cérinique Lorsque le chauffage dans la glycérine est poussé jusqu'à 253 ou 260°, la mince paroi cellulosique se voit ordinairement détachée à l'intérieur de la cellule. Dans toutes les cellules subéreuses, on réussit encore, à un degré plus ou moins marqué, à obtenir la réaction de l'acide cérinique; mais dans un petit nombre seulement on parvient, à l'aide de l'acide chromique et des autres réactifs sus-nommés, à mettre en évidence la lamelle subéreuse en son entier; le plus souvent il n'en reste, à l'état reconnaissable, que de petits fragments ou points, surtout aux angles de la cellule. Enfin, quand la température a été portée encore plus haut, par exemple à 270°, on trouve la paroi cellulosique librement suspendue dans la cellule ou tombée dehors (fig. 9), tandis qu'il n'est plus possible, n'importe par quel moyen, de découvrir une trace de la lamelle subéreuse.

Chez le *Populus pyramidalis* la lamelle subéreuse est, de même que chez les deux plantes précédentes, également développée sur tout son pourtour, mais elle y possède une épaisseur plus considérable; à ce dernier égard, il en est de même pour la paroi cellulosique, qui en outre se montre plus fortement développée au côté interne qu'au côté externe. Après chauffage à 230°, la membrane cellulosique est déjà souvent détachée de la paroi de la cellule, et, sous l'influence de l'acide chromique, il semble que les lamelles subéreuses soient déjà devenues un peu plus minces. Continue-t-on à chauffer, successivement jusqu'à 240, 250, 260 et 270°, et étudie-t-on ensuite les coupes par les méthodes indiquées plus haut, on

arrive à des résultats à peu près les mêmes que ceux obtenus chez le *Sambucus*. Vis-à-vis d'une température élevée, c'est aux angles de la cellule que la lamelle subéreuse résiste le mieux. Dans les rameaux que j'ai examinés et où le tissu subéreux avait une épaisseur de plusieurs assises cellulaires, elle était décomposée plus rapidement dans les assises externes que dans les assises internes. Chez le *Populus*, son pouvoir de résistance paraît être encore un peu moindre que chez le *Sambucus*. Il est à remarquer que, ni chez l'une ni chez l'autre de ces deux plantes, la lamelle subéreuse ne peut être enlevée sans que la paroi cellulosique se détache. On doit donc supposer ou bien que la décomposition de la subérine s'accompagne de la déorganisation de la base cellulosique, ou bien que la lamelle subéreuse ne possède pas une pareille base. Dans l'un des Chapitres suivants, je dirai laquelle de ces deux hypothèses me paraît conforme à la vérité.

Le *Syringa vulgaris* présente une lamelle subéreuse mince et une paroi cellulosique d'épaisseur moyenne; toutes les deux sont développées uniformément sur toute leur étendue. La lamelle subéreuse se distingue de celles dont il a été question jusqu'ici par sa forte teneur en cire. En examinant une coupe chauffée jusqu'à 230°, on trouve souvent la paroi cellulosique, la lamelle subéreuse et la lamelle moyenne déjà séparées l'une de l'autre; néanmoins à part l'exsudation de la cire fondue, il ne s'est encore produit aucune modification bien apparente dans la lamelle subéreuse. Aussi n'est-il pas difficile de la mettre en évidence par divers moyens et de l'isoler avec les globules de cire qui y adhèrent. Lorsque la température a été portée jusqu'à 240°, on voit bien encore, entre la lamelle moyenne et la paroi cellulosique devenue entièrement libre, de nombreux globules et grumeaux, de dimensions variées, mais, à cela près, on ne découvre plus rien de la lamelle subéreuse, de quelque manière qu'on s'y prenne (voir fig. 7). Si l'on examine les susdits globules et grumeaux, en traitant les coupes qui les contiennent par

l'acide chromique concentré, ou successivement par l'acide chromique étendu, l'eau et l'acide sulfurique, on peut se convaincre de leur pouvoir de résistance vis-à-vis de ces acides. Après le gonflement et la dissolution des parois cellulaires, on voit en quelle grande quantité ils existent souvent. Par l'iode ils sont colorés en jaune très clair. Ils sont solubles dans le chloroforme et l'éther bouillants, ce dont je me suis assuré en plongeant les coupes dans ces liquides (voir fig. 8); ainsi traitées, elles étaient si complètement débarrassées de globules et de grumeaux que je n'en pus retrouver aucun, n'importe par quel moyen. Avant d'être immergées dans le chloroforme ou l'éther, les préparations, retirées de l'eau, furent déposées quelques instants dans l'alcool, parce que l'eau ne se mêle presque pas aux deux liquides nommés en premier lieu. Pour avoir la certitude que dans ces expériences les globules et grumeaux n'étaient pas emportés mécaniquement, j'essayai, mais en vain, de les entraîner par une ébullition prolongée dans l'eau. Les résultats que j'obtins en chauffant les coupes jusqu'à 245, 253, 260, 270 et 280° concordent avec ceux qui viennent d'être décrits. Par la manière dont les globules et grumeaux en question se comportent vis-à-vis des réactifs et des agents dissolvants, nous sommes suffisamment autorisés à conclure qu'ils proviennent de la cire, que la lamelle subéreuse laisse déjà exsuder, en grande partie, au-dessous de 100°. Il est remarquable à quel point, après la décomposition complète de la lamelle subéreuse sous l'influence d'un chauffage prolongé, les globules et grumeaux conservent, pour une bonne part au moins, leur place entre la lamelle moyenne et la paroi cellulosique.

Chez le *Cytisus Laburnum*, contrairement à ce que nous avons vu chez les plantes précédentes, la lamelle subéreuse est beaucoup plus fortement développée du côté de la paroi externe que du côté de la paroi interne. La paroi cellulosique est mince, à développement partout égal, et lignifiée. Le chauffage à 240 ou 255° attaque déjà d'une manière appré-

ciable la lamelle subéreuse, et vers 270° je l'ai trouvée détruite en majeure partie. L'élévation de la température jusqu'à 280 et 290° fut insuffisante, toutefois, pour décomposer aussi le reste de la lamelle subéreuse. Lorsque les coupes chauffées à 270, 280 ou 290° étaient ensuite traitées par le chlorure de zinc iodé, la lamelle moyenne, la paroi cellulosique et, entre elles deux le reste de la lamelle subéreuse se coloraient en jaune; d'une base cellulosique de la lamelle subéreuse je ne pus rien apercevoir. En traitant les coupes chauffées par l'acide chromique concentré, je remarquai qu'il se dissolvait nonseulement de la lignine et de la cellulose, mais aussi une grande partie de la subérine encore existante, et que quelques rares débris de liège, appartenant aux assises cellulaires internes du tissu subéreux d'un an employé à mes observations, étaient seuls épargnés. Le pouvoir de résistance des restes subéreux est en général si faible qu'on parvient à les dissoudre en grande partie même par l'acide chromique étendu, sans attaquer fortement la cellulose (comp. fig. 10). Après avoir enlevé l'acide chromique par le lavage, je ne réussis plus à déceler des restes subéreux que dans les couches cellulaires internes, et cela à l'aide de l'iode, du mélange de Schultze, de l'acide sulfurique, du chlorure de zinc iodè, ou de l'iode et de l'acide sulfurique un peu étendu. Dans les deux derniers cas, la lamelle moyenne et la mince paroi cellulosique maintenant libre dans la cellule, toutes les deux débarrassées de la lignine par l'acide chromique, se colorent en beau bleu, tandis que les restes de la lamelle subéreuse prennent une couleur jaune (fig. 21). La preuve que réellement une partie de la subérine est dissoute par l'acide chromique, peut s'obtenir en traitant à chaud par le chlorate de potasse et l'acide nitrique les coupes préalablement chauffées à 290°; chez toutes les cellules subéreuses on observe alors la formation de globules d'acide cérinique, tant grands que petits. Dans quelques cellules c'est la partie externe de la lamelle subéreuse qui résiste le mieux à l'action de la chaleur

et à celle de l'acide chromique; chez la plupart, toutefois, je n'ai pu distinguer, sous ce rapport, aucune partie déterminée.

Chez le *Betula alba* j'ai rencontré, dans le tissu subéreux, des cellules à parois épaisses et des cellules à parois plus minces, les unes et les autres allongées tangentiellement et alternant entre elles en couches composées de plusieurs rangées de cellules. Dans les cellules de la première espèce, auxquelles sont principalement empruntées les données suivantes, l'épaississement de la lamelle subéreuse est en majeure partie borné à la paroi externe et à la paroi interne, où la lamelle présente un développement à peu près égal. J'ai déjà fait remarquer antérieurement que la lamelle subéreuse consiste en deux parties, dont l'externe seule est résistante vis-à-vis de l'acide chromique concentré (fig. 11). Ces deux parties se comportent aussi d'une manière différente en présence d'une forte élévation de température, ainsi qu'on va le voir. A 230° il ne s'opère pas encore de modifications notables dans la lamelle subéreuse, mais déjà à 240° la partie interne est décomposée et disparaît. L'élévation de la température jusqu'à 250, 260, 270, 280 et 290° ne fournit pas de nouveaux résultats. La partie externe continue à résister, bien que le chauffage, même à 230° seulement, n'ait pas été tout à fait sans influence; en effet, par une solution très concentrée d'acide chromique cette partie est attaquée et dissoute avant qu'on ne réussisse à séparer les cellules par la dissolution de la lamelle moyenne. Lorsque les coupes chauffées sont traitées pendant peu de temps par l'acide chromique étendu, puis soumises, après lavage par l'eau, à l'influence du chlorure de zinc iodé, la partie épargnée de la lamelle subéreuse, qui durant l'action de l'acide chromique a produit des sinuosités dans les parois cellulaires (Pl. XI, fig. 12), est colorée en jaune et la mince paroi cellulosique prend une couleur bleue, de sorte que toutes les deux se distinguent alors nettement (voir fig. 22). L'existence

de la première de ces parties peut être démontrée, en outre, au moyen du mélange de Schultze.

Les résultats obtenus chez le *Fagus silvatica* concordent sous beaucoup de rapports avec ceux qui viennent d'être décrits. L'épaississement de la lamelle subéreuse est de nouveau borné essentiellement aux parois tangentielles et à peu près également prononcé à la paroi externe et à la paroi interne. A l'aide de l'acide chromique on ne peut pas distinguer deux parties dans la lamelle subéreuse, mais par le chauffage dans la glycérine cela réussit tout aussi bien que chez le *Betula*. A 230°, la lamelle subéreuse, à part quelque diminution du pouvoir de résistance vis-à-vis de l'acide chromique concentré, ne subit pas encore de modification sensible; mais lorsque le chauffage est continué jusqu'à 240°, on ne retrouve plus que la partie externe de la lamelle subéreuse. L'élévation de la température jusqu'à 290° est sans influence sur cette partie. Sa résistance à l'action de l'acide chromique reste la même; il faut une solution très concentrée pour en opérer le gonflement bulleux et la dissolution. Comme la partie restante de la lamelle subéreuse possède une épaisseur assez notable, elle se laisse très aisément mettre en évidence par divers réactifs; pour la mince paroi cellulosique cela est plus difficile, mais on y réussit pourtant fort bien de la manière décrite à propos du *Betula*.

Chez le *Virgilia lutea* l'accroissement en épaisseur de la lamelle subéreuse est encore borné essentiellement aux parois tangentielles; c'est surtout à la paroi externe que la lamelle est fortement développée. Chauffée dans la glycérine, elle n'éprouve aucun changement au-dessous de 220°, mais déjà à 230° la plus grande partie, l'interne, est décomposée et disparaît. Sous l'influence du traitement par l'acide chromique étendu, la partie externe, qui a résisté, occasionne le plissement onduleux des parois cellulaires (fig. 13). Après avoir enlevé l'acide chromique à l'aide de lavages à l'eau, on peut par divers moyens se convaincre de la présence de cette

partie externe, bien qu'elle ne soit pas aussi épaisse que chez le *Fagus*. Prolonge-t-on toutefois la macération dans l'acide chromique et donne-t-on à celui-ci un peu plus de force, il vient bientôt un moment où, dans beaucoup de cellules, la lamelle subéreuse ne se distingue plus qu'à peine ou pas du tout (comp. fig. 14), même après lavage par l'eau et addition d'iode ou de chlorure de zinc iodé. Néanmoins, la partie externe de la lamelle subéreuse n'est pas dissoute en entier par l'acide chromique. Si l'on détruit en effet la paroi cellulosique par l'acide sulfurique ajouté avec précaution, il ne subsiste bientôt plus du tissu subéreux qu'un réseau délicat, composé de la mince lamelle moyenne et du reste de la lamelle subéreuse, lequel reste recouvre la lamelle moyenne comme d'une mince pellicule et la protège contre l'action de l'acide (voir fig. 15). Pour justifier cette manière de voir, on n'a d'ailleurs, au lieu de traiter la préparation par l'acide sulfurique, qu'à la chauffer avec le mélange de Schultze: des globules d'acide cérinique se forment alors dans toutes les cellules subéreuses. Il est à peine besoin de mentionner que, lorsque les coupes chauffées sont traitées ensuite par l'acide chromique étendu et par le chlorure de zinc iodé, la paroi cellulosique, devenue entièrement libre dans la cellule, est colorée en beau bleu et nettement observable. Elle est très mince du côté de la paroi interne et notablement plus épaisse à la paroi externe, caractère qui se présente rarement (voir fig. 24). Par le chauffage à 240, 250, 260, 270, 280 et 290°, la lamelle subéreuse n'éprouva aucune modification ultérieure, ainsi qu'on le reconnut en l'étudiant de la manière ci-dessus exposée.

Parmi les plantes qui offrent le plus d'intérêt quant à la façon dont la lamelle subéreuse se comporte à une température élevée, il faut certainement citer le *Pirus Malus*. La lamelle subéreuse y possède à la paroi externe une épaisseur considérable, tandis qu'à la paroi interne et aux parois latérales elle n'est que peu développée. La mince paroi cellulosique, au contraire, est, à la paroi interne, un peu plus

épaisse qu'aux autres parois. Après un chauffage à 240 ou 245°, la lamelle subéreuse, indépendamment de l'exsudation de la cire fondue, a déjà subi quelque changement, ce qui ressort surtout de sa moindre résistance vis-à-vis de l'acide chromique ; mais je ne m'étendrai pas à ce sujet, vu que les phénomènes de décomposition sont beaucoup plus apparents lorsque les coupes ont été chauffées jusqu'à 253°. Dans beaucoup de cellules les épaisses parois externes paraissent alors être devenues plus minces ; chez quelques-unes la partie moyenne de la paroi a même disparu, sans laisser une base cellulosique. En traitant les coupes par l'acide chromique étendu, on remarque qu'une partie de la subérine restée se dissout. Après les avoir lavées ensuite par l'eau (fig. 16), on peut aisément constater, à l'aide de l'iode ou du mélange de Schultze, que la lamelle subéreuse n'a pas été enlevée tout entière. Ajoute-t-on avec précaution du chlorure de zinc iodé ou de l'iode et de l'acide sulfurique un peu étendu, la paroi cellulosique se colore en beau bleu et devient par suite bien distincte (fig. 25). Si la macération dans l'acide chromique avait été prolongée quelque temps, ou que de l'acide sulfurique eût été ajouté, on aurait obtenu après la dissolution des parois cellulosiques un réseau délicat, formé par la lamelle moyenne et par le reste de la lamelle subéreuse, qui d'abord préserve la lamelle moyenne de l'action des acides employés. Dans les deux cas — dans le premier après avoir enlevé l'acide chromique par l'eau — on observe qu'à la paroi externe, en outre de la partie extérieure de la lamelle subéreuse, le bord intérieur a également résisté, circonstance que je n'ai rencontrée que chez le *Pirus*. La première des parties en question est très mince, la seconde, qui divise en quelque sorte la cellule en deux compartiments, plus épaisse (voir fig. 17). Quand le chauffage est poussé jusqu'à 260, 270, 280 et 290°, le reste de la lamelle subéreuse n'éprouve pas de nouveaux changements, ce dont on s'assure le mieux en le soumettant, de la façon sus-indiquée,

à l'action des réactifs. Les résultats ainsi obtenus ne différaient en rien des précédents.

Chez le *Salix caprea* la lamelle subéreuse présente, vis-à-vis d'une température élevée, une plus grande résistance que dans tous les autres cas dont j'ai traité. Le chauffage à 290°, à part l'exsudation de cire, qui a déjà lieu au-dessous de 100°, exerce peu d'influence sur la paroi subéreuse, comme me l'a appris la traitement par l'acide chromique et par d'autres réactifs.

Au risque de tomber dans des redites, j'ai cru devoir exposer successivement et séparément ce qui concerne chacun des cas étudiés, et cela non-seulement à cause de la différence des résultats obtenus chez des plantes différentes, mais aussi afin de rendre plus facile, à d'autres observateurs, le contrôle rigoureux de la méthode que j'ai suivie et qui n'avait pas encore été appliquée jusqu'ici. Examinons maintenant brièvement quelles conclusions peuvent être tirées des expériences décrites dans ce Chapitre. J'ai déjà dit qu'en aucun cas il ne s'opère une fusion de la lamelle subéreuse, abstraction faite de l'exsudation de cire qui a lieu au-dessous de 100°. S'il fallait expliquer par la fusion les modifications que la lamelle subit lors du chauffage, nous aurions certainement dû trouver en maints cas des masses de subérine fondue, de même que, par exemple chez le *Syringa*, nous avons trouvé, après décomposition de la subérine, des masses de cire. Nous avons vu que les températures auxquelles se produisent les changements dans la lamelle subéreuse coïncident avec celles où se décomposent les graisses, et que les phénomènes observés ne peuvent s'expliquer qu'en admettant que la subérine aussi subit une décomposition. Nous avons constaté, en outre, que le pouvoir de résistance de la lamelle subéreuse aux températures élevées est très inégal, non-seulement chez des plantes différentes, mais souvent aussi pour différentes parties de la lamelle, ce qui y dé-

note une différence de composition chimique. Je pense, d'après cela, qu'il existe dans la lamelle subéreuse, indépendamment de la soi-disant cire, plusieurs corps analogues aux graisses proprement dites. Il m'est impossible de partager l'opinion de M. von Höhnel, à savoir, que la subérine n'offrirait pas de modifications essentielles et que par conséquent l'élément caractéristique de la lamelle subéreuse ne serait représenté que par un corps chimique unique. En ce qui touche la question de la base cellulosique de la lamelle subéreuse, en aucun des cas traités je n'ai réussi, après l'éloignement de la subérine, à mettre une pareille base en évidence. Nous sommes donc obligés de croire ou bien qu'elle a été détruite mécaniquement du cours de la décomposition de la subérine, ou bien que la lamelle subéreuse ne contient pas de base cellulosique. Dans l'espoir d'arriver à une décision satisfaisante entre ces deux hypothèses, j'ai chauffé dans la glycérine, puis soumis à un examen comparatif, différentes cuticules à couches cuticularisées. Les principaux résultats de cet examen seront communiqués dans le Chapitre suivant.

V. Expériences comparatives sur la cuticule et les couches cuticularisées.

M. von Höhnel [1]) a insisté, à différentes reprises, sur la grande analogie de la subérification et de la cuticularisation. J'ai donc jugé nécessaire d'examiner aussi, chez différentes plantes, la manière dont la cuticule se comporte à une température élevée, surtout au point de vue de la question concernant la base cellulosique; par l'étude du développement j'avais en effet réussi, dans une couple de cas, savoir chez le *Syringa vulgaris* et le *Convallaria majalis*, à rendre très probable l'existence d'une base cellulosique

---

[1]) *Über den Kork* etc, *l.c.*, p. 575 et suiv.
Einige Bemerkungen über die Cuticula, *l.c.*, p. 81 et suiv.

dans les couches cuticularisées. En traitant par la solution de chlorure de zinc iodé des coupes de très jeunes entre-nœuds de la première des deux plantes ci-dessus nommées, on peut nettement observer que la mince cuticule recouvre les minces parois cellulosiques. La première est colorée en jaune, les secondes prennent une couleur bleue. Examine-t-on des entre-nœuds un peu plus âgés, on trouve que toutes les deux sont devenues un peu plus épaisses. Les couches cuticularisées se forment immédiatement sous la cuticule. Aussi bien pendant qu'après leur formation, elles sont séparées des cavités des cellules épidermiques par des parties pariétales composées de cellulose Elles ne peuvent donc naître par apposition, mais bien par intersusception, savoir par addition de cutine entre la cellulose, ou par transformation de la cellulose en cutine ; ce dernier mode de production n'est toutefois pas probable, raison pour laquelle nous pouvons supposer dans les couches cuticularisées l'existence d'une base cellulosique. Pour le rhizome du *Convallaria majalis* je suis arrivé à la même conclusion.

Le chauffage dans la glycérine, jusqu'à 290°, appliqué à différentes cuticules épaisses, entre autres chez *Aucuba japonica*, *Ilex aquifolium* et *Hedera Helix*, ne m'a pas fourni de résultats satisfaisants. Parfois la cuticule semblait être devenue un peu plus mince, souvent elle n'offrait plus à l'acide chromique autant de résistance qu'auparavant, mais je ne parvins pas à mettre à découvert, par élimination de la cutine, la base cellulosique. Avec la feuille d'*Eucalyptus globulus* je fus un peu plus heureux. Après chauffage à 290°, je pus colorer en bleu par le chlorure de zinc iodé un assez large bord au côté interne des épaisses parois qui recouvrent les cellules épidermiques, tandis qu'avant le chauffage ces parois, à l'exception d'un liséré à peine perceptible, étaient colorées en jaune. Par le chauffage la partie interne paraissait donc avoir été débarrassée de la cutine, ne laissant que la base cellulosique. Les résultats furent meilleurs avec la tige du

Syringa vulgaris et avec le rhizome du *Convallaria majalis*. Dans les deux cas je réussis, par le chauffage à 290°, à enlever toute la cutine aux couches cuticularisées et à retenir la base cellulosique. Celle-ci a la même intégrité que d'autres parois formées de cellulose. Elle est recouverte par la cuticule proprement dite, qui existe déjà dans un état très jeune, et qui se distingue des couches cuticularisées par la propriété de résister à une température plus élevée. Tandis qu'avant le chauffage les couches cuticularisées étaient réfractaires à l'action de l'acide chromique ainsi qu'à celle de l'acide sulfurique et se coloraient en jaune sous l'influence des réactifs iodés, après le chauffage toute la paroi cellulaire, sauf la cuticule proprement dite, est rapidement dissoute par les dits acides et, en présence de la dissolution de chlorure de zinc iodé ou de l'iode additionné d'acide sulfurique un peu étendu, elle prend une couleur bleue, en même temps qu'elle éprouve un gonflement plus ou moins prononcé. Il ne souffre aucun doute que la cutine des couches cuticularisées ne soit décomposée par le chauffage et, par suite, ne disparaisse de la paroi cellulaire. Le fait, que la base cellulosique reste alors dans un état d'intégrité, me paraît avoir une influence décisive pour la question de savoir laquelle des deux hypothèses posées à la fin du Chapitre précédent doit être regardée comme exprimant la vérité. Si, en effet, la lamelle subéreuse avait une base cellulosique, nous aurions, de même que dans les couches cuticularisées, dû voir celle-ci en différents cas, par exemple chez *Pirus*, *Virgilia* et *Cytisus*, tandis qu'ailleurs, par exemple chez *Sambucus*, *Populus* et *Syringa*, nous aurions pu nous attendre, après la destruction de la subérine, à trouver la paroi cellulosique et la lamelle moyenne encore unies entre elles par la base cellulosique de la lamelle subéreuse. Ni l'un ni l'autre n'ayant pu être observé, et les arguments produits en faveur du contenu cellulosique de la lamelle subéreuse ayant été jugés insuffisants, on doit en conclure que la lamelle subéreuse, à l'opposé des couches

cuticularisées, ne possède pas de base cellulosique. Aussi, je ne partage plus cette opinion généralement régnante parmi les botanistes: que la paroi cellulosique forme toujours le fondement de la paroi adulte des cellules végétales.

Comme les expériences ci-dessus décrites avaient pour unique but de mettre à découvert la base cellulosique, je me suis ordinairement borné à appliquer une température de 290°; pour le *Syringa vulgaris*, toutefois, un chauffage à 270° fut également trouvé suffisant.

VI. La structure intime de la lamelle subéreuse.

Dans les recherches dont les résultats ont été communiquées aux Chapitres précédents je me proposais, en premier lieu, d'étudier de plus près, par la voie michrochimique, la nature chimique de la lamelle subéreuse et de me former à cet égard une idée qui fût d'accord avec les observations. Le présent Chapitre, au contraire, sera principalement consacré à la question de la structure organique de la lamelle subéreuse. Ce ne sont plus ses principes chimiques, mais ses éléments organisés, qui feront l'objet essentiel de notre examen. Avant de rapporter mes expériences à ce sujet, je dois fixer un instant l'attention sur les recherches de M. Wiesner concernant l'organisation de la paroi cellulaire végétale [1]). Cet observateur a réussi, sur différents tissus, à séparer de la paroi cellulaire des petits corps arrondis, organisés. A ces corpuscules, qui souvent se trouvent à la limite de l'observation microscopique, il a donné le nom de dermatosomes. Les agents employés pour en obtenir la séparation étaient de nature diverse. Parmi eux, l'eau chlorée occupe un des premiers rangs; fréquemment renouvelée, elle doit agir pendant

---

[1]) *Unters. über die Organisat. d. veget. Zellhaut*, dans *Sitzb. d. Wiener Akad.* 1886, 93. B., p. 17 et suiv.

des semaines avant qu'il soit possible de diviser les parois cellulaires, par la pression, en dermatosomes. Les idées de M. Wiesner sur l'union mutuelle des dermatosomes dans les parois cellulaires en voie de développement ou adultes, de même que celles qui ont rapport à l'accroissement de la paroi cellulaire, peuvent être passées ici sous silence ; parce que, n'étant pas déduites de l'observation de parois subéreuses, elles n'ont qu'un intérêt secondaire pour notre étude. En traitant du tissu subéreux, pour l'examen duquel il a choisi le liège à bouchons, il dit, entre autres, que l'action de l'eau chlorée doit être prolongée pendant des mois avant que le tissu se laisse diviser par la pression en dermatosomes [1]). Quant à la nature de ces dermatasomes et au mode de leur union mutuelle, il ne donne aucune indication particulière. Evidemment il considère le tissu subéreux, relativement à ces deux points, comme semblable à beaucoup d'autres tissus.

Moi aussi j'ai réussi à obtenir, chez le tissu subéreux, une dissociation en petits corpuscules globuleux, qu'à l'exemple de M. Wiesner j'appellerai dermatosomes. Les agents appliqués à cet effet furent toujours des réactifs énergiques, savoir, la potasse caustique en solution, l'eau chlorée, l'acide nitrique et l'acide chromique. Tous furent employés à l'état plus ou moins concentré et, au besoin, renouvelés à différentes reprises. Après qu'ils avaient agi pendant plusieurs mois ou pendant un an, la substance qui unit les dermatosomes était suffisamment décomposée pour que le tissu subéreux se laissât désagréger en ces corpuscules par la pression. Le liège à bouchons formait la matière ordinaire de mes expériences, mais je me suis assuré que celles-ci réussissaient aussi avec différents autres tissus subéreux, tant à parois épaisses qu'à parois minces. Chez le liège à bouchons, lorsque les réactifs ci-dessus nommés ont agi assez lontemps, les cellules conservent souvent encore une faible cohérence ; une légère pression sur le

---

[1]) *l.c.*, p. 45 et 46.

couvre-objet suffit pour détacher de nombreux granules et bâtonnets; sous une pressien plus forte, le tissu tout entier se résout en de pareils corpuscules. Les petits granules isolés sont des dermatosomes; les bâtonnets constituent des réunions de semblables éléments, puisque, par des pressions et glissements répétés du couvre-objet, ils se laissent diviser en granules distincts. Les bâtonnets les plus minces représentent chacun, manifestement, une rangée unique de dermatosomes. En ce qui concerne la lamelle subéreuse d'autres tissus, la potasse est, de tous les agents précités, celui qui paraît mériter de beaucoup la préférence pour rendre possible la dissociation en dermatosomes. C'est ce que j'ai constaté surtout chez le *Cytisus Laburnum*. Après avoir été traitée pendant une couple de mois par l'eau chlorée, la lamelle subéreuse de cette plante ne se prête encore qu'avec peine à une division en dermatosomes au moyen de la pression; l'opération réussit bien, au contraire, après 24 heures de macération dans une solution concentrée de potasse. La lamelle subéreuse a pris alors un aspect granuleux; sa structure en couches est devenue plus ou moins distinctement visible; sur des coupes très minces nous pouvons observer que les couches consistent en granules juxtaposés; par la pression et le frottement ceux-ci se désagrègent et nous les reconnaissons pour des dermatosomes. En aucun cas la lamelle subéreuse ne s'est laissé diviser en dermatosomes aussi rapidement que chez le *Cytisus*.

Après que le séparation des dermatosomes eut été opérée avec succès pour différents tissus subéreux, je voulus soumettre ces corpuscules à un examen comparatif avec ceux qui avaient été isolés d'autres tissus. A cet effet, je fis macérer dans l'eau chlorée, fréquemment renouvelée, différentes matières fibreuses, telles que lin, coton, jute et chanvre, l'opération étant continuée jusqu'à ce que, par la pression et le frottement, une division en dermatosomes fut devenue possible. Les dermatosomes ainsi obtenus sont colorés en bleu par la solution de chlorure de zinc iodé et rapidement

dissous par l'acide sulfurique ou chromique concentrés; de même que M. Wiesner [1]), j'admets qu'ils sont formés de cellulose. Tout autre est la manière dont se comportent vis-à-vis des réactifs les dermatosomes que j'ai séparés de la lamelle subéreuse. Ceux-ci résistent à l'action des acides sulfurique ou chromique concentrés; les dermatosomes individuels ne sont d'ordinaire pas sensiblement colorés par l'iode, par le chlorure de zinc iodé, ni par l'iode et l'acide sulfurique; quelquefois j'ai remarqué qu'ils avaient pris une légère teinte jaune. En outre de leur conduite différente en présence des réactifs, ils se distinguent déjà des dermatosomes composés de cellulose par leur contour plus nettement accusé. D'après ces faits, combinés avec les résultats mentionnés antérieurement, j'admets que les dermatosomes retirés de la lamelle subéreuse ne consistent pas en cellulose, mais en subérine. Quant à savoir jusqu'à quel point ils ont subi des modifications lors de leur extraction de la paroi cellulaire, c'est une question difficile à décider.

Je placerai ici une couple de remarques concernant la cuticule et les couches cuticularisées, dont j'ai également pu séparer des corpuscules globuleux et des bâtonnets, ressemblant à ceux que m'a donnés la lamelle subéreuse et se comportant de la même façon vis-à-vis des réactifs. Chez l'*Aucuba japonica*, entre autres, cette séparation me réussit au moyen de l'acide chromique concentré, appliqué pendant quelqus semaines à la température ordinaire, et de même au moyen d'un traitement prolongé par la lessive potassique froide; dans les deux cas, à l'aide d'une pression exercée sur le couvre-objet. Avec la potasse, le but est atteint beaucoup plus rapidement lorsqu'on favorise l'action du réactif en chauffant le tout au bain-marie. Les dermatosomes séparés des couches cuticularisées ont-ils, en opposition avec ceux de la lamelle subéreuse, un contenu cellulosique, par exemple lorsqu'ils ont été mis en liberté au moyen de la potasse?

[1]) *l.c.*, p. 76.

A cet égard, vu le petit nombre de mes recherches, je ne me hasarde pas à émettre une opinion.

J'ai déjà dit, plus haut, que pour rendre possible chez la lamelle subéreuse une division en dermatosomes on doit donner la préférence à la solution de potasse. Non seulement parce qu'elle nous conduit le plus rapidement au but, mais aussi pour d'autres raisons, elle mérite une recommandation toute spéciale. L'emploi de cet agent nous permet, en effet, de constater que la liaison mutuelle des dermatosomes est vaincue beaucoup plus promptement dans la direction tangentielle que dans la direction radiale. C'est ce dont on peut s'assurer après une macération qui, chez certaines plantes, ne demande que quelques jours, mais que chez d'autres on doit continuer pendant des semaines. La potasse a alors provoqué différents changements dans la lamelle subéreuse. Par suite de la décomposition de la matière qui se trouve entre les dermatosomes, certaines liaisons sont détruites. Comme cette décomposition s'accompagne d'un gonflement et que la potasse détermine dans la tissu subéreux des tensions anomales, les dermatosomes sont éloignés les uns des autres là où les liaisons sont abolies, et il en résulte que d'ordinaire une structure feuilletée très distincte apparaît dans la lamelle subéreuse. Chez les lamelles subéreuses minces, les feuillets présentent généralement toutes sortes de courbures (voir fig. 3). C'est chez les lamelles épaisses que j'ai pu le mieux me convaincre du gonflement. Si l'on continue la macération dans la potasse, la matière par laquelle les dermatosomes restent encore unis en feuillets distincts est attaquée de plus en plus. Finalement, ce dernier lien est rompu à son tour et, comme nous l'avons déjà dit, une simple pression suffit alors pour effectuer la séparation des dermatosomes. Il ressort de ce qui précède, que le lien unisant les dermatosomes en feuillets est plus intime que celui par lequel ces feuilets sont rattachés les uns aux autres pour former la lamelle subéreuse. Peut-être les dermatosomes sont-ils plus rappro-

chés dans la direction tangentielle que dans la direction radiale et résulte-t-il de là que la solution potassique peut pénétrer plus facilement suivant la première de ces directions que suivant la seconde. Les plantes que j'ai examinées ne présentaient d'ailleurs pas toutes, avec la même évidence, le fait que les dermatosomes sont plus solidement reliés entre eux dans le sens tangentiel que dans le sens radial; la structure feuilletée ne se laissait pas non plus reconnaître toujours d'une manière également certaine. Chez le *Cytisus Laburnum*, les liaisons peuvent déjà être abolies dans les deux directions après environ un jour de macération. Chez le *Quercus Suber*, je n'ai pu observer qu'un dédoublement en deux feuillets. Par contre, dans plusieurs autres cas, parmi lesquels il y en a aussi à lamelles subéreuses très minces, la structure feuilletée peut être rendue parfaitement distincte. Voici comment je m'y suis pris chez *Syringa vulgaris*, *Populus pyramidalis*, *Sambucus nigra* et *Hedera Helix*, toutes plantes de la catégorie de celles qui possèdent une lamelle subéreuse mince et d'épaisseur uniforme. Après quelques semaines de macération (voir fig. 3), la potasse fut soigneusement enlevée au moyen de lavages, puis les coupes furent traitées par l'acide chromique, lequel, au bout de quelque temps, fut à son tour éloigné avec précaution à l'aide de l'eau. Soumises alors à l'observation, les lamelles subéreuses se montrèrent composées de plusieurs feuillets très minces (fig. 4). L'idée que je viens de donner de la structure feuilletée ou en couches de la lamelle subéreuse, structure qu'on peut rarement constater sans le secours de réactifs, se rapproche des conclusions de M. Wiesner concernant la stratification et la striure de la menbrane cellulaire conclusions qu'il résume dans les termes suivants: „Elle (la paroi cellulaire) n'est toutefois, à strictement parler, composée ni de couches ni de fibrilles, mais de dermatosomes, qui, rangés dans un ordre déterminé, s'unissent soit en fibrilles, soit en couches, soit de l'une et de l'autre manière." [1])

[1]) *l.c.*, p. 68.

Je mentionnerai ici, brièvement, un singulier mode de jonction des dermatosomes, savoir, en bâtonnets placés radialement, mode que j'ai parfois observé dans les couches cuticularisées, et le plus nettement chez la feuille de l'*Eucalyptus globulus*. Après quelques semaines de traitement par la potasse ou l'acide chromique, la partie externe des couches cuticularisées présente une structure feuilletée; la partie adjacente se montre alors fortement attaquée par les réactifs, tandis qu'une partie plus interne apparaît formée de bâtonnets, qui sont dirigés normalement à la circonférence.

Ci-dessus j'ai parlé de différents phénomènes que la potasse, à la température ordinaire, provoque successivement chez la lamelle subéreuse. A en juger d'après la nature chimique de cette lamelle, la décomposition que les phénomènes en question dénotent ne peut guère être considérée que comme une saponification. En aucun cas, toutefois, nous ne pouvons observer distinctement les produits de la saponification, qui se forment entre les différents feuillets et dermatosomes de la lamelle. Pour obtenir plus de certitude au sujet du processus de décomposition qui se manifeste, j'ai donc soumis à la macération dans la potasse quelques cuticules épaisses. La grande analogie qui existe entre les éléments constitutifs de la lamelle subéreuse et ceux de la cuticule et des couches cuticularisées donnait lieu de croire que chez l'une et l'autre de ces formations il se produirait des phénomènes semblables, mais qui seraient probablement plus faciles à observer dans les couches cuticularisées, à cause de leurs dimensions plus considérables. Je ne décrirai pas en détail l'action de la potasse sur ces couches, mais me bornerai à quelques indications générales. De même que chez la lamelle subéreuse, on observe très vite une coloration en jaune, qui se fonce insensiblement et passe souvent à l'orangé; plus tard, la matière colorante étant peu à peu dissoute par l'agent de macération, la coloration perd de nouveau de son intensité. La production de la matière colorante est un phénomène accessoire, qui n'ap-

partient pas au processus de saponification proprement dit et trouve peut-être son origine dans la présence de tannin. Je ne puis toutefois en donner l'explication positive, n'ayant fait à ce sujet qu'un petit nombre d'expériences. Un autre phénomène, qui ne tarde pas non plus à se manifester et qu'on peut observer aussi sur des lamelles subéreuses épaisses, est le gonflement qu'éprouvent les couches cuticularisées, par suite de la formation des produits de saponification. Ceux-ci sont tellement abondants qu'une partie en traverse la paroi cellulaire et apparaît au dehors, sous la forme de boules colorées en jaune, qui acquièrent ordinairement un volume considérable. Après quelques jours ou quelques semaines de macération, j'ai pu observer de pareilles boules chez *Aucuba japonica*, *Eucalyptus globulus*, *Ilex aquifolium*, *Syringa vulgaris* et *Viscum album*. L'addition d'eau amène rapidement la dissolution des produits de saponification, dissolution qui est accompagnée de la disparition de la couleur jaune et précédée d'un gonflement subit. Les boules colorées en jaune laissent alors un résidu de petites particules, qui sont entraînées par l'eau et échappent ainsi à un examen ultérieur.

Chez la lamelle subéreuse, qui ne donne pas lieu à la formation de boules, on ne peut observer directement une dissolution des produits de la saponification; mais cette dernière se laisse conclure du fait que la macération dans la potasse, aussi bien que l'addition subséquente d'eau, détermine chez la lamelle subéreuse et chez les couches cuticularisées des phénomènes analogues. Cette manière de voir s'accorde aussi avec l'observation suivante. Si du liège à bouchons est coupé en fragments très menus, introduit dans un petit flacon et recouvert de solution de potasse, on trouve, au bout de quelques mois, que le tissu subéreux a subi les changements déjà mentionnés, tandis que la liqueur potassique est colorée en brun foncé. Sur le fond du flacon se sont déposés, en outre, des grumeaux incolores, très facilement solubles dans l'eau. C'est ce dont on peut s'assurer à l'aide

du microscope. En recueillant ces grumeaux et les dissolvant dans l'eau, on obtient par l'addition d'une solution de chlorure de sodium un précipité blanc, qui, vu au microscope, se montre composé de petits flocons finement grenus. Ces grumeaux consistent donc évidemment en savon, qui, par suite de la désagrégation du tissu subéreux, a pu se rassembler au fond du flacon.

Il est remarquable que dans beaucoup de cas les couches cuticularisées soient attaquées, par la potasse, à des degrés si différents. Tandis que certaines parties, tout comme la cuticule proprement dite, se montrent très résistantes, chez d'autres la cutine est décomposée dans une large mesure. Chez l'*Eucalyptus globulus* je pus même, dans ces dernières parties, après que les produits de saponification et la potasse eurent été enlevés au moyen de l'eau, obtenir par le chlorure de zinc iodé la réaction de la cellulose, savoir, la coloration en bleu; cette coloration se distingue bien de la coloration en violet qui, chez l'*Aucuba japonica*, est provoquée par ce même réactif après macération des couches cuticularisées dans l'acide chromique, et qui ressemble à la coloration en violet de la lamelle subéreuse. Lorsque la macération dans la potasse est continuée pendant longtemps, on réussit finalement à séparer, par la pression, des dermatosomes et des bâtonnets.

De même que pour la lamelle subéreuse, on peut aussi pour la cuticule et les couches cuticularisées employer d'autres agents que la potasse à l'effet de rendre possible la division en dermatosomes par la pression. C'est ce dont je me suis assuré, pour l'acide chromique, en une couple de cas, savoir, chez *Aucuba japonica* et *Eucalyptus globulus*. Un fait digne de remarque, c'est que la partie des couches cuticularisées qui s'était montrée la moins résistante vis-à-vis de la potasse fut aussi celle que l'acide chromique attaqua le plus fortement.

En beaucoup de cas, où j'étais parvenu au moyen de la potasse à faire apparaître une structure feuilletée dans la

lamelle subéreuse, je n'y réussis pas à l'aide de l'acide chromique; cela doit probablement être attribué à des causes accessoires, entre autres à la prompte séparation des lamelles subéreuses, qui par suite ne peuvent éprouver aucune influence mécanique du dehors lorsque l'acide chromique détruit les liaisons entre les dermatosomes; puis aussi à la circonstance que les produits de la décomposition sont rapidement dissous, au lieu de rester dans la lamelle subéreuse et d'y produire du gonflement, ainsi qu'il arrive lors de l'emploi de la potasse.

Ainsi bien dans le cas de la lamelle subéreuse que dans celui de la cuticule et des couches cuticularisées, nous avons vu que la matière désignée sous le nom de subérine ou de cutine présente, vis-à-vis des réactifs et vis-à-vis d'une élévation de température, un pouvoir de résistance très variable. Dans les deux cas, nous avons rencontré des éléments qui à la température ordinaire résistent opiniâtrement à l'action de divers réactifs très énergiques, à côté d'autres qui se décomposent rapidement. Dans les deux cas, nous avons montré que chez certaines parties de parois il ne se produit, au-dessous de 290°, aucune modification appréciable, tandis que chez d'autres, à une température beaucoup plus basse, il s'opère une décomposition complète. Toutes les observations indiquent que, tant sous la dénomination de subérine que sous celle de cutine, se trouvent réunis des composés chimiques différents, et, en outre, que parmi ces composés il y en a de très analogues dans les deux catégories. Aussi doit-on regretter que ces dénominations aient l'une et l'autre trouvé crédit chez les botanistes, car il peut maintenant arriver que les deux processus connus comme subérification et cuticularisation soient réputés différents au point de vue chimique. Il me paraît convenable de rompre avec l'une des deux dénominations et de comprendre les corps qui constituent les deux catégories sous le nom de subérine, auquel, à cause de sa dérivation de *suber*, je donne la préférence. La dénomination de cuticule,

pour la membrane ainsi désignée spécialement, peut être conservée. Des expressions telles que cuticularisation et couches cuticularisées, pour les choses auxquelles on les applique maintenant, sont certainement à désapprouver.

VII. Sur la subérification de la lamelle moyenne.

M. von Höhnel [1]) admet, pour différents tissus subéreux, que la lamelle moyenne manque dans les parois radiales, ou, en d'autres termes, qu'elle y est subérifiée. Chez des espèces du genre *Salix* cela serait, selon lui, le cas dans toutes les parois radiales, chez d'autres plantes, dans un certain nombre seulement. Cette conclusion repose sur ce que les cellules subéreuses se laissent bien séparer, au moyen de l'acide chromique par exemple, dans la direction tangentielle, mais non, ou seulement en partie, dans la direction radiale. Dans plusieurs cas j'ai pu me convaincre, en effet, que dans la première de ces directions les cellules subéreuses se laissent désunir, par l'acide chromique, plus vite et plus facilement. Mais je crois devoir expliquer ce phénomène d'une manière plus simple que ne l'a fait M. von Höhnel. Chez trois plantes, *Populus pyramidalis*, *Virgilia lutea* (fig. 23) et *Cytisus Laburnum*, j'ai observé que dans les parois tangentielles la lamelle moyenne était plus épaisse et plus fortement lignifiée que dans les parois radiales. Dans les premières l'acide chromique aura donc, mieux que dans les secondes, l'occasion de pénétrer entre les lamelles subéreuses, parce que ces lamelles y sont séparées par un espace un peu plus grand et parce que la lignine ne présente qu'une faible résistance à l'action de l'acide chromique. Le lien qui unit les rangées cellulaires tangentielles sera donc détruit plus tôt que celui qui existe

---

1) *Ueber den Kork* etc., *l.c.*, p. 565 et 566.

entre les rangées radiales, et par suite les divisions se produiront surtout dans le sens tangentiel. Lorsque, toutefois, l'acide chromique a agi pendant un temps suffisant, les cellules sont désunies dans les deux directions, ainsi qu'on peut le reconnaître en faisant légèrement glisser le couvre-objet. Dans un autre cas, savoir chez *Pirus Malus*, j'ai trouvé que les parois radiales étaient très onduleuses (voir fig. 18); de ce côté les cellules sont donc unies plus intimement, et par conséquent moins faciles à séparer par l'acide chromique, que du côté des parois tangentielles. Un léger déplacement du couvre-objet suffit, ici encore, pour montrer que la lamelle moyenne est dissoute aussi dans les parois radiales. Chez le *Salix caprea* je n'ai pu, de même que M. von Höhnel chez d'autres espèces du genre *Salix*, obtenir qu'une division dans le sens tangentiel (fig. 19). Après avoir traité le tissu subéreux par l'acide chromique, nous voyons qu'au côté externe des épaisses parois tangentielles sont fixées les minces lamelles subéreuses. Ainsi que je l'ai mentionné précédemment, on réussit dans certaines circonstances à communiquer à ces lamelles, au moyen des réactifs iodés, une coloration violette, tandis que les parois épaisses se colorent toujours en jaune. On remarque alors que les minces lamelles colorées en violet entourent les cavités des cellules et se continuent le long des parties pariétales épaisses et teintes en jaune (voir fig. 26). Quant à l'explication à donner, chez les *Salix*, de la division exclusivement tangentielle du tissu subéreux, je n'ai rien à en dire, n'ayant pu éclaircir l'anatomie de ce tissu caractéristique; il m'a été impossible, en effet, de le débarrasser de la subérine par le chauffage dans la glycérine, et je n'ai pas non plus eu l'occasion, jusqu'ici, d'en étudier le développement. Sauf en ce qui concerne le *Salix*, je crois d'ailleurs avoir expliqué d'une manière satisfaisante les particularités que peut présenter la division, puisque, dans les cas où elles font défaut, j'ai trouvé la lamelle moyenne développée au même degré chez

les parois radiales et tangentielles, et les premières de ces parois dépourvues de toute ondulation.

Pour terminer, encore une couple de remarques au sujet du phénomène mentionné en dernier lieu, savoir, l'ondulation. Dans le tissu subéreux, il paraît être très rare. M. Wieler [1]), en parlant de mon Mémoire sur la gaîne du cylindre central [2]), fait à mon hypothèse concernant la cause de ce phénomène l'objection suivante: „Contre l'hypothèse de l'auteur on peut alléguer à bon droit que des phénomènes semblables devraient également se produire dans la cellule subéreuse typique, où jusqu'ici ils n'ont pas été observés". Le *Pirus Malus* fournit toutefois la preuve que des plis ou ondulations peuvent bien dûment apparaître aussi sur la paroi de la cellule subéreuse. Le phénomène présente, dans ce cas, beaucoup d'analogie avec ce que j'ai observé ailleurs. Il est principalement borné aux parois radiales, qui, vues de côté, montrent des raies alternativement plus claires et plus foncées. Dans les parois tangentielles il manque complètement.

VIII. Récapitulation des résultats.

Les résultats de notre travail se laissent résumer dans les propositions suivantes:

1. La lamelle subéreuse ne contient pas de cellulose.
2. Après macération dans l'acide chromique ou la potasse à la température ordinaire, ou après chauffage avec la solution de potasse, la lamelle subéreuse peut être colorée en violet tant par l'iode que par le chlorure de zinc iodé.
3. En opposition avec les couches cuticularisées, la lamelle subéreuse ne laisse pas de base cellulosique lorsque, par le chauffage dans la glycérine, on réussit à la débarrasser de la subérine.

---

[1]) *Bot. Ztg.*, 1886, n°. 6.

[2]) *La Gaine du cylindre central d. l. rac. d. Phanérog.* (*Arch. Néerl.*, T. XX).

4. Différentes combinaisons chimiques, très analogues aux matières grasses, constituent l'élément essentiel de la lamelle subéreuse. Elles sont comprises sous la dénomination commune de „subérine".
5. Chauffée dans la glycérine, à des températures où les graisses se décomposent, la lamelle subéreuse éprouve une décomposition, qui n'est pas précédée de fusion.
6. La température à laquelle cette décomposition se produit est différente pour des plantes différentes et souvent même pour des parties différentes d'une même lamelle subéreuse.
7. Le pouvoir de résistance à l'action de la potasse ou d'autres réactifs énergiques est très différent pour différents éléments de la lamelle subéreuse.
8. Après le traitement prolongé par ces réactifs à la température ordinaire, on réussit, à l'aide de la pression, à diviser la lamelle subéreuse en petits corps globuleux, ou dermatosomes, qui consistent en subérine et diffèrent par conséquent de ceux que M. Wiesner a séparés de beaucoup d'autres tissus.
9. Dans ce traitement, la subérine qui se trouve entre les dermatosomes subit une décomposition, une saponification lorsque c'est la potasse qu'on emploie.
10. Lors de l'emploi de la potasse, on observe que les liaisons entre les dermatosomes sont en général détruites plus facilement dans la direction tangentielle que dans la direction radiale, d'où il résulte que d'ordinaire une structure feuilletée apparaît dans la lamelle subéreuse.
11. Les matières comprises sous le dénomination de cutine sont très voisines de celles qu'on réunit sous le nom de subérine.
12. La présence de soi-disant cire, dans la lamelle subéreuse, est moins rare qu'on ne l'avait supposé jusqu'ici.
13. Des plis ou ondulations peuvent se former dans la lamelle subéreuse.

14. En beaucoup de cas, il n'est pas nécessaire d'admettre dans les parois radiales une subérification de la lamelle moyenne pour expliquer la fissilité plus grande des cellules dans la direction tangentielle.

Ainsi qu'il a été dit dans l'introduction, je me suis vu forcé, bien à regret, d'interrompre le cours de mes recherches. Volontiers j'aurais étudié la lamelle subéreuse chez un plus grand nombre de plantes et donné plus d'extension à mes expériences comparatives sur la cuticule. J'aurais non moins vivement désiré pouvoir continuer les recherches que j'avais entreprises sur quelques points passés sous silence dans le présent Mémoire. Tels sont, en premier lieu, l'explication de la coloration violette de la lamelle subéreuse, ensuite l'histoire du développement de la lamelle subéreuse comparée à celle d'autres parois cellulaires, la manière dont différents tissus se comportent sous l'influence du chauffage dans la glycérine, et finalement la présence de la cellulose dans les parois cellulaires des végétaux inférieurs et la nature chimique de la matière dite „cellulose fongique", dont l'existence comme espèce cellulosique particulière est contestée. Bien que n'étant pas encore arrivé, en ce qui concerne ces diverses questions, à des conclusions déterminées, je crois déjà pouvoir dire que leur étude payera certainement les peines qu'elle aura coûtées. Hors d'état, au moins provisoirement, de me livrer moi-même à cette étude, je donne l'appréciation ci-dessus afin qu'elle puisse servir de guide à d'autres observateurs dans le choix d'un sujet de travail.

STEENWIJK, Janvier 1888.

Explication des Figures.

Toutes les figures, sauf celles en couleurs, sont dessinées à un grossissement linéaire de 1000/1.

La signification des lettres est la suivante: *s* lamelle subéreuse ou son reste, *m* lamelle moyenne, *c* paroi cellulosique, *t* lamelle intermédiaire, *w* cire, $s + m$ lamelle moyenne avec les deux lamelles subéreuses contiguës ou avec leurs parties externes.

PLANCHE X.

Fig. 1. *Syringa vulgaris*, lamelle subéreuse séparée par l'acide chromique.
" 2. " " après chauffage avec la solution de potasse.
" 3. " " après macération dans la potasse à froid.
" 4. " " lamelles subéreuses séparées, après macération dans la potasse froide, par l'acide chromique.
" 5. " " après chauffage dans l'eau à 100°.
" 6. " " lamelle subéreuse séparée, après chauffage dans l'eau à 100°, par l'acide chromique.
" 7. " " après chauffage dans la glycérine à 253°.
" 8. " " après chauffage dans la glycérine à 253° et traitement par le chloroforme ou l'éther à la température de l'ébullition.
" 9. *Sambucus nigra*, après chauffage dans la glycérine à 270°.
" 10. *Cytisus Laburnum*, après chauffage dans la glycérine à 270° et traitement par l'acide chromique étendu.
" 11. *Betula alba*, parties externes de lamelles subéreuses séparées par l'acide chromique.

PLANCHE XI.

" 12. " " après chauffage dans la glycérine à 260° et traitement par l'acide chromique étendu.
" 13. *Virgilia lutea*, après chauffage dans la glycérine à 230° et traitement par l'acide chromique étendu.
" 14. " " après chauffage dans la glycérine à 260° et traitement par l'acide chromique en solution un peu plus concentrée que pour la fig. 13.
" 15. " " après chauffage dans la glycérine à 260°, traitement par l'acide chromique comme pour la fig. 14, puis traitement par l'acide sulfurique concentré.

Fig. 16. *Pirus Malus*, après chauffage dans la glycérine à 260° et traitement par l'acide chromique étendu.

" 17. " " après chauffage dans la glycérine à 260°, traitement par l'acide chromique étendu comme pour la fig. 16, puis traitement par l'acide sulfurique concentré.

" 18. " " coupe tangentielle.

" 19. *Salix caprea*, après traitement par l'acide chromique.

" 20. *Cytisus Laburnum*, lamelle subéreuse séparée par l'acide chromique et colorée par le chlorure de zinc iodé.

" 21. " " après chauffage dans la glycérine à 270°, traitement par l'acide chromique étendu et coloration par le chlorure de zinc iodé.

" 22. *Betula alba*, après chauffage dans la glycérine à 260°, traitement par l'acide chromique étendu et coloration par le chlorure de zinc iodé.

" 23. *Virgilia lutea*, après macération dans la potasse à froid et traitement par le chlorure de zinc iodé.

" 24. " " après chauffage dans la glycérine à 230°, traitement par l'acide chromique étendu et coloration par le chlorure de zinc iodé.

" 25. *Pirus Malus*, après chauffage dans la glycérine à 260°, traitement par l'acide chromique étendu et coloration par le chlorure de zinc iodé.

" 26. *Salix caprea*, après traitement par l'acide chromique et coloration par le chlorure de zinc iodé.

SUR LE RÔLE DU COËFFICIENT DE TRANSPORT DANS UNE ÉQUATION DU COURANT ÉLECTRIQUE,

PAR

P. H. DOJES.

En 1877, M. von Helmholtz [1]) déduisit de la théorie mécanique de la chaleur une formule pour la force électromotrice des courants électriques dus aux différences de concentration des liquides. Plus tard [2]), le même savant établit, pour tous les éléments voltaiques réversibles, la relation $\frac{dE}{dT} = \frac{Q}{T}$, où E représente la force électromotrice, T la température absolue et Q la chaleur absorbée lors du passage isothermique de l'unité de quantité d'électricité. Toutes les grandeurs doivent être exprimées en unités mécaniques (électrostatiques ou électromagnétiques). Les recherches de M. Czapski [3]), de M. Gockel [4]) et surtout de M. Jahn [5]) ont donné à la formule de M. von Helmholtz une confirmation expérimentale.

Je me propose de signaler ici une circonstance, qui peut infirmer l'exactitude rigoureuse de cette formule, en ce qui concerne les piles usitées contenant des substances en dissolution.

---

[1]) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, T. I, ou *Wied. Ann.*, T. III, 1878.

[2]) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, T. II, ou *Berl. Berichte*, 1882.

[3]) *Wied. Ann.*, T. XXI.

[4]) *Wied. Ann.*, T. XXIV.

[5]) *Wied. Ann.*, T. XXVIII.

Considérons, à cet effet, un élément voltaique composé de deux plaques d'une même métal, placées dans des dissolutions inégalement concentrées d'un de ses sels. Afin de simplifier, nous prenons la différence de concentration assez petite pour que le coefficient de transport „Ueberführungszahl" puisse être regardé comme constant. A cet élément nous faisons parcourir, de la manière suivante, un cycle réversible:

I. Passage isothermique spontané de di unités de quantité d'électricité, à la température T.

II. Echauffement à la température $T + dT$ (sans courant électrique) au moyen de corps de grande capacité, dont les températures surpassent celles de l'élément dans l'intervalle dT de quantités infiniment petites.

III. Passage isothermique provoqué de di_1 unités de quantité électrique.

IV. Refroidissement à la température originelle T d'une manière analogue à l'échauffement sous II.

Pendant la première partie de ce cycle, $di(1-n)$ équivalents du sel dissous sont transportés de la cathode à l'anode. Si, à la température $T + dT$, le coefficient de transport est égal à $n + \frac{dn}{dT} dT$, il faut, pour compenser la diminution et l'augmentation de concentration produites par le processus I, faire passer encore la quantité d'électricité $\frac{di. \frac{dn}{dT} dT}{1-n}$, de sorte qu'on ait alors $di_1 = di \left(1 + \frac{\frac{dn}{dT} dT}{1-n}\right)$. Soient, en outre, c_1 la capacité thermique du système lors de l'échauffement, c_2 la capacité lors du refroidissement, et Q la quantité de chaleur (toujours exprimée en unités mécaniques) qui est absorbée lors du passage, sous I, de l'unité de quantité d'électricité.

L'application de la 2me et de la 1ère loi fondamentale de la thermodynamique donne les équations:

$$\frac{Q}{T}di + \frac{c_1 dT}{T} - \frac{Q + dQ}{T + dT}\left(di + \frac{di.\frac{dn}{dT}dT}{1-n}\right) - \frac{c_2 dT}{T} = 0$$

$$- Edi + Qdi + c_1 dT - (Q + dQ)\left(di + \frac{di.\frac{dn}{dT}dT}{1-n}\right)$$

$$+ (E + dE)\left(di + \frac{di.\frac{dn}{dT}dT}{1-n}\right) - c_2 dT = 0,$$

ou après réduction, et en posant $\frac{c_1 - c_2}{di} = \frac{dc}{di}$: [1])

$$\frac{Q}{T} - \frac{dQ}{dT} - \frac{Q}{1-n} \cdot \frac{dn}{dT} + \frac{dc}{di} = 0,$$

$$\frac{dE}{dT} - \frac{dQ}{dT} + \frac{E}{1-n} \cdot \frac{dn}{dT} - \frac{Q}{1-n} \cdot \frac{dn}{dT} + \frac{dc}{di} = 0,$$

d'où il résulte:

$$\frac{dE}{dT} + E \cdot \frac{\frac{dn}{dT}}{1-n} = \frac{Q}{T}.$$

Si le coefficient de transport n'est pas indépendant de la température, on doit donc remplacer la relation $\frac{dE}{dT} = \frac{Q}{T}$, relative aux courants de concentration, par l'expression qui vient d'être trouvée. En outre, puisque dans tous les piles voltaiques en usage la concentration exerce de l'influence, la formule de Helmholtz ne peut pas non plus, dans l'hypothèse énoncée, s'appliquer rigoureusement à ces éléments. Pour éliminer dans ces éléments (à métaux différents) le changement de composition produit par le passage de l'électricité à une température inférieure, il faudrait, à la température supérieure, d'abord faire passer en sens inverse la même quantité d'électricité, puis, en vaporisant jusqu'à ce que le sel se dépose enlever à chaque couche son excès de sel, de ma-

[1]) Voir, au sujet de cette quantité: Lippmann, *C. R.*, T. XCIX, 1884.

nière que, finalement, chacun des deux sels fût ramené à sa place primitive.

A part une observation de M. Hittorf [1]), qui pour une dissolution de sulfate de cuivre trouva pour le coefficient de transport, entre 4 et 21° C, une valeur constante, il n'a pas été fait d'expériences concernant la variabilité avec la température; il est donc impossible, en ce moment, de décider si la formule $\frac{dE}{dT}=\frac{Q}{T}$ doit être corrigée dans le sens ci-dessus indiqué.

La formule $\frac{dE}{dT}+\frac{E\frac{dn}{dT}}{1-n}=\frac{Q}{T}$, pour les courants de concentration, peut aussi être obtenue suivant une voie entièrement analogue à celle qui a conduit M. von Helmholtz à la formule $\frac{dE}{dT}=\frac{Q}{T}$. Pour la variation de l'énergie, lors des courants de concentration, la grandeur $di\,(1-n)$ doit être regardée comme variable indépendante. En désignant cette grandeur par di_1 nous pouvons écrire pour la chaleur absorbée:

$$dQ_1 = dU + Edi = \frac{\partial U}{\partial T}dT + \left(\frac{\partial U}{\partial i}+\frac{E}{1-n}\right)di_1.$$

La condition, que $\frac{dQ_1}{T}$ soit une différentielle totale, donne:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial i_1}=\frac{1}{T}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial i_1\partial T}+\frac{\frac{dE}{dT}}{1-n}+\frac{E}{(1-n)^2}\cdot\frac{dn}{dT}\right\}-$$
$$-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial i_1}+\frac{E}{1-n}\right).$$

Pour $\frac{\partial U}{\partial i_1}+\frac{E}{1-n}$ nous écrivons

$$\left(\frac{dQ_1}{di_1}\right)_{T\,\mathrm{const.}}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dQ_1}{di}=\frac{Q}{1-n},$$

et obtenons ainsi:

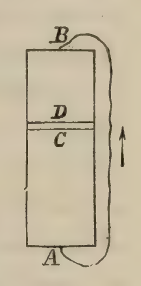
---

[1]) Pogg. *Ann.*, Bd LXXXIX.

$$\frac{dE}{dT} + \frac{E.\frac{dn}{dT}}{1-n} = \frac{Q}{T} \text{ ou } \frac{d}{dT}\left(\frac{E}{1-n}\right) = \frac{Q}{(1-n)\,T},$$

c'est-à-dire, la même équation que ci-dessus.

Nous pouvons encore, pour les „courants de concentration", calculer directement la chaleur développée chimiquement, et montrer ainsi qu'il existe une différence entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque. Imaginons un vase cylindrique vertical, rempli d'une dissolution saline dont la concentration décroît dans la direction de A vers B. A et B sont deux plaques, unies par un fil conducteur, du métal contenu dans le sel. Soit x la hauteur d'une section au-dessus de la base A. Le coefficient n varie avec la concentration : donc il est fonction de x. La concentration du liquide sera indiquée par le nombre de grammes d'eau qu'il contient pour 1 équivalent électrochimique du sel.



Dans la dissolution, le courant marche de B vers A ; le passage de i unités d'électricité a pour conséquence que $i\,(1-n)$ équivalents du sel traversent la section C dans la direction de A vers B. A travers la section D, au contraire, passent $i\left(1-n-\frac{dn}{dx}\,dx\right)$ équivalents de sel, de sorte qu'il reste, dans la couche CD, $i\frac{dn}{dx}\,dx$ équiv. de sel. En outre, dans la couche infiniment mince qui touche à B, la quantité de sel est augmentée de $i\,(1-n_a)$ éq., tandis qu'elle est diminuée de $i\,(1-n_k)$ éq. dans la couche qui touche à A.

Le passage isothermique de i unités d'électricité donne lieu à l'absorption d'une certaine quantité de chaleur (positive ou négative), que nous représentons par $i\,Q$. Si, toutefois, les susdits changements de concentration étaient effectués sans qu'il en résultât d'énergie électrique ou mécanique, il y aurait absorption d'une autre quantité de chaleur,

que nous désignerons par $W\,i$. Cette dernière quantité, qui représente donc la variation de l'énergie, est, selon l'ancienne dénomination. la chaleur développée (ici absorbée) chimiquement. Evaluons cette chaleur. Pour cela, il faut d'abord calculer la chaleur qui apparaît lorsque la quantité de sel de la couche $C\,D$ est augmentée de $i \frac{dn}{dx} dx$ équivalents.

Considérons, à cet effet, le cycle suivant. Dans une quantité de solution saline renfermant q gr. d'eau et 1 équivalent électrochimique de sel, on dissout, à température constante, la quantité de sel infiniment petite dz. Une quantité de chaleur $w\,d\,z$ est absorbée lors de cette opération. La dissolution est ensuite soumise à une évaporation lente, isothermique, et cela jusqu'à ce qu'elle soit saturée et ait de nouveau abandonné la quantité infiniment petite de sel dz. On sépare ce précipité, et la masse de vapeur est ramenée dans la dissolution saline par une compression lente, isothermique. Le cycle est alors accompli.

Pour le calcul, nous introduisons les notations suivantes: L sera la chaleur latente de vaporisation pour 1 gramme de vapeur d'eau émise par la dissolution saline (cette quantité varie donc avec la concentration); q_1, le nombre de grammes d'eau correspondant, dans la solution saturée, à 1 équivalent de sel; enfin, $pv = R\,T$, le produit connu de la pression par le volume pour 1 gramme de vapeur d'eau. En admettant qu'à la température ordinaire d'appartement la vapeur d'eau obéisse à la loi de Mariotte — Gay-Lussac, on déduit, du principe de la conservation de l'énergie, l'équation suivante:

$$wdz + \int_{q_1}^{q} L_1\, dq - pv\,(q-q_1) - \int_{q_1}^{q} L\, dq + pv\,(q-q_1) - Ndz = 0;$$

Ndz est la chaleur qui se dégage lorsque la quantité dz de sel depose.

Il est facile de voir que l'augmentation de la tension de vapeur, qui est produite par l'élimination de la quantité dz de sel, ne fournit pas de termes: en effet, puisque la loi de Mariotte

est applicable, la compression ou dilatation isothermique de là vapeur donne lieu au dégagement ou à l'absorption d'une quantité de chaleur précisément équivalente à la quantité du travail mécanique. Ces termes se compensent donc dans l'équation.

Pour L_1 nous pouvons écrire $L + \frac{dL}{dz} dz$, et l'équation ci-dessus se change alors en:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad w + \int_{q_1}^{q} \frac{dL}{dz} dq - N = 0.$$

Suivant une formule connue, on a $L = v\,T\,\frac{dp}{dT}$ ou $L = R\,T^2 \frac{\partial \log p}{\partial T}$, et par conséquent:

$$\frac{dL}{dz} = R\,T^2 \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \log p}{\partial T} = R\,T^2 \cdot \frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

D'après la loi de Wüllner, ou peut poser $p_0 - p = \frac{b}{q}$, formule dans laquelle p_0 est la tension de la vapeur saturée, et b une constante qui dépend seulement de T, non de la concentration. De même, on a $p_0 - p - \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{b\,(1 + \partial z)}{q}$, par conséquent $\frac{\partial p}{\delta z} = - \frac{b}{q}$.

En introduisant cette valeur dans la formule (1), on obtient:

$$w = R\,T^2 \frac{d}{d\,T} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq} dq + N.$$

Nous ferons remarquer que l'intégration par rapport à q peut s'exécuter, mais on verra tout à l'heure qu'il est inutile de l'effectuer.

Revenons maintenant à notre élément galvanique. La couche CD, où la quantité de sel augmente de $\frac{dn}{dx} dx$, absorbe par suite une quantité de chaleur $wi \frac{dn}{dx} dx$, égale à:

$$i \frac{dn}{dx} dx \,.\, R\,T^2 \frac{d}{d\,T} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq}\, dq + i\,N. \frac{dn}{dx} dx.$$

Il est d'ailleurs facile de voir, par la considération du cycle, que cette même formule représente aussi la quantité de chaleur qui se *dégage*, lorsqu'une certaine quantité de sel est soustraite à l'une des couches.

Nous avons maintenant à intégrer entre les limites 0 et h, h étant la hauteur du cylindre, l'expression $wi \frac{dn}{dx} dx$; or, on a:

$$\int_o^h iw \frac{dn}{dx} dx = i \int_o^h dx \,.\, \frac{dn}{dx} \,.\, R\,T^2 \frac{d}{d\,T} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq}\, dq + i \int_o^h N \frac{dn}{dx} dx.$$

En posant $\frac{dn}{dx} = - \frac{d\,(1-n)}{dx}$ et en appliquant au premier terme l'intégration par parties, on trouve pour cette expression:

$$(2) \ldots\ldots - i \Big[(1-n)\, R\,T^2 \frac{d}{d\,T} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq} dq \Big]_o^h +$$

$$+ i \int_o^h dx\,(1-n)\, R\,T^2 \frac{dq}{dx} \frac{d}{d\,T} \Big(\frac{b}{pq}\Big) - \Big[Ni\,(1-n) \Big]_o^h$$

La différentiation de $\frac{d}{d\,T} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq}\, dq$, par rapport à x, donne en effet: $\frac{d}{d\,T} \Big(\frac{b}{pq} \cdot \frac{dq}{dx} \Big) = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{d}{dT} \Big(\frac{b}{pq} \Big)$, puisque q_1 est indépendant de x et que p est fonction de q.

Aux électrodes apparaissent encore deux termes pour la chaleur absorbée dans les tranches adjacentes, savoir:

$$\text{en } B:\ i\,(1-n_a)\, R\,T^2 . \frac{d}{dT} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq}\, dq + Ni\,(1-n),$$

$$\text{en } A:\ - i\,(1-n_k)\, R\,T^2 . \frac{d}{dT} \int_{q_1}^{q} \frac{b}{pq}\, dq - Ni\,(1-n_k)\,.$$

Ces deux termes se compensent avec le premier et le dernier terme de l'expression (2), de sorte qu'il nous reste, pour la chaleur absorbée chimiquement:

$$i\int_0^h dx\,(1-n)\,R\,T^2 .\frac{dq}{dx}\cdot\frac{d}{dT}\left(\frac{b}{pq}\right),$$

ou, en prenant q pour variable indépendante, et par unité de quantité d'électricité:

$$W=\int_{q_k}^{q_a}(1-n)\,R\,T^2 .\,\frac{d}{dT}\left(\frac{b}{pq}\right).\,dq$$

Pour une différence infiniment petite de concentration à l'anode et à la cathode, la chaleur absorbée chimiquement (variation d'énergie) est donc:

$$w=(1-n)\,R\,T^2 .\frac{d}{dT}\left(\frac{b}{pq}\right)dq\,.$$

Si l'on désigne par e la différence de potentiel entre la catode et l'anode, et par q la chaleur réellement absorbée lors du passage de l'unité de quantité d'électricité, on a

$w=q-e$ et $\frac{d}{dT}\left(\frac{e}{1-n}\right)=\frac{q}{(1-n)\,T}$, d'où il résulte:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{e}{1-n}\right)-\frac{e}{(1-n)\,T}=\frac{w}{(1-n)\,T}\ \text{ou}\ \frac{d}{dT}\left\{\frac{e}{(1-n)\,T}\right\}=\frac{w}{(1-n)\,T^2}.$$

Nous trouvons donc $\frac{d}{dT}\left\{\frac{e}{(1-n)\,T}\right\}=R.\,\frac{d}{dT}\left(\frac{b}{pq}\right)dq$, ou, en intégrant par rapport à T:

$$\frac{e_1}{(1-n_1)\,T_1}-\frac{e_2}{(1-n_2)\,T_2}=R.\,\frac{b_1}{p_1\,q}.\,dq-R.\,\frac{b_2}{p_2\,q}.\,dq$$

Pour la valeur de T à laquelle correspond $e=0$, on doit avoir aussi $b=0$. En donnant à T_2 cette valeur, on obtient l'équation:

$$\frac{e}{(1-n)T}=R\,.\,\frac{b}{pq}.\,dq\ \text{ou}\ e=R\,T\,(1-n)\,\frac{b}{pq}.\,dq$$

Comme la force électromotrice, pour une valeur finie de la

différence de concentration, est égale à la somme de toutes ces différences infiniment petites de potentiel, on trouve:

$$E = R\,T\int_{q_k}^{q_a}(1-n)\,\frac{b}{pq}\,.\,dq = b\,R\,T\int_{q_k}^{q_a}\frac{(1-n)}{qp_0-b}\,.\,dq.$$

Nous arrivons ainsi, par une voie entièrement différente, à la même formule que M. Helmholtz avait déjà établie [1]).

Pour la chaleur absorbée lors du passage de l'unité de quantité électrique, on trouve:

$$Q = W + E = RT^2\,\frac{d}{dT}\int_{q_k}^{q_a}\frac{(1-n)\,b}{qp_0-b}\,dq + b\,RT\int_{q_k}^{q_a}\frac{(1-n)}{qp_0-b}dq.$$

Cette grandeur est positive; la force électromotrice doit donc croître lorsque la température s'élève, ce qui est confirmé par l'observation. Il est intéressant aussi de remarquer la petitesse de la valeur de W: puisque, d'après M. Wüllner, b croît à peu près proportionnellement à p_0, $\frac{d}{dT}\int_{q_k}^{q_a}\frac{(1-n)b}{qp_0-b}dq$ est très petit (nul, en cas de proportionnalité parfaite). Les éléments voltaiques dans lesquels il n'y a en action que des différences de concentration, travaillent donc presque exclusivement aux dépens de la chaleur absorbée. Lorsque b croît exactement dans le même rapport que p_0, on trouve, outre $W=0$, que l'accroissement de E est proportionnel à la température absolue, à moins que n ne varie également; en effet, de $W=0$, il résulte $E=C(1-n)T$, C étant une constante qui ne dépend pas de T.

On peut demander, finalement, en quels endroits cette chaleur Q est absorbée; à cette question, toutefois, la théorie ne fournit pas de réponse. Il est clair que Q est la somme

---

1) Wied. *Ann*, Bd. III, p. 210, form. (4*e*).

algébrique des différentes valeurs de l'effet de Peltier, tel qu'il se produit au point de contact de métal et de la dissolution et aux points de contact des dissolutions inégalement concentrées. Des recherches de M. du Bois-Reymond [1]) et de M. Wild [2]) il résulte que la seconde de ces deux parties de l'effet de Peltier est très petite.

---

[1]) *Monatsberichte der Berl. Akad*, juill. 1856.
[2]) Pogg. *Ann.*, Bd CIII, 1858.

RECHERCHES BOLOMÉTRIQUES DANS LE SPECTRE INFRA-ROUGE,

PAR

W. H. JULIUS.

Malgré le vif intérêt avec lequel ont été accueillies les observations bolométriques de M. Langley concernant la distribution spectrale de la chaleur de sources calorifiques relativement faibles, la méthode employée dans ces recherches n'a encore été que peu suivie. Le principe de la méthode, indiqué pour la première fois, comme on le sait, par Svanberg, revient à mesurer dans le pont de Wheatstone les changements de résistance qu'un conducteur subit sous l'influence d'un échauffement. M. Langley a fait voir qu'on pouvait de cette manière, avec son bolomètre, mesurer des quantités de chaleur beaucoup plus petites qu'avec la pile thermo-électrique dans sa forme habituelle [1]; mais, à la sensibilité supérieure du nouvel instrument correspond une augmentation si considérable des difficultés du maniement, qu'il n'y a pas lieu de s'étonner que plus d'un ait dû renoncer à s'en servir. Aussi, à ma connaissance, n'y a-t-il encore, outre M. Langley,

---

[1]) Le radiomicromètre que M. Vernon Boys a fait connaître en 1887 (*Proc. of the Roy. Soc.*. XLII, p. 189) est également fondé sur l'apparition d'un courant thermo-électrique, mais celui-ci y est appliqué, à la production d'un écart, beaucoup plus avantageusement que cela n'est possible par l'emploi d'une pile thermo-électrique avec multiplicateur. Peut-être réussira-t-on à approprier cet appareil à l'étude du spectre, de telle façon qu'il rende encore plus de services que le bolomètre.

que deux physiciens, M. C. Bauer [1]) et M. H. Schneebeli [2]), qui aient publiés des recherches bolométriques sur la radiation de la chaleur; leurs mesures, toutefois, n'avaient pas rapport au spectre.

Or, c'est précisément pour les recherches *spectrales*, dans lesquelles on doit pouvoir étudier des faisceaux non seulement faibles mais en outre extrêmement déliés, que l'emploi du bolomètre présente de notables avantages, parce qu'il y a moins d'inconvenients à donner de petites dimensions à ce conducteur sensible qu'à une pile thermo-électrique.

La grande bienveillance de M. le professeur Buys Ballot, qui mit à ma disposition toutes les ressources du cabinet de physique de l'Université d'Utrecht, m'a permis de combiner les appareils assez compliqués qui sont nécessaires pour l'exécution d'observations bolométriques dans le spectre.

Les pages suivantes donnent un aperçu de la disposition des instruments et des principaux résultats auxquels ils ont conduit jusqu'ici.

DESCRIPTION DES APPAREILS.

a. Le Bolomètre.

Après avoir pesé mûrement les conditions auxquelles un bon bolomètre doit satisfaire, je donnai à l'instrument la forme représentée, au $\frac{1}{3}$ de la grandeur réelle, dans la fig. 1, Pl. XII [3]). L'appareil, comme on le voit, est d'une construc-

[1]) C. Bauer, *Wied. Ann.*, XIX, p. 17 (1883).

[2]) H. Scheebeli, *Wied. Ann.*, XXII, p. 430 (1884).

[3]) La construction de ce bolomètre et d'autres instruments nécessaires à mes recherches a été confiée à M H. Olland, d'Utrecht Toutesles pièces livrées par cet artiste étaient d'une exécution soignée et ont parfaitement répondu à l'attente.

tion tout à fait symétrique. Celle-ci fut adoptée, primitivement, en vue de l'application éventuelle à des mesures différentielles; dans les circonstances données, toutefois, la symétrie profite seulement à la condition que les deux parties fines du circuit conducteur soient dans un état aussi égal que possible. Cette condition peut être regardée comme absolument essentielle. C'est à cause d'elle, aussi, que le noyau de l'instrument, l'enveloppe immédiate de ces parties sensibles, consiste en un cylindre massif de cuivre rouge (fig. 2), matière qui, à raison de sa grande conductibilité calorifique, convient le mieux pour obtenir une distribution uniforme de la température. Ce cylindre est placé à l'intérieur d'un manchon en laiton *M* (fig. 1), qui l'entoure aussi par le bas et est rempli d'eau; le noyau se trouve ainsi à l'abri des brusques variations de température qui pourraient venir du dehors, occasionnées par des courants d'air ou par le rayonnement. Horizontalement à travers le cylindre est foré un trou rond *a*, et au-dessus de ce trou se trouve une ouverture carrée *b*, ayant environ 15 mm. de côté; celle-ci, toutefois, ne traverse pas le cylindre d'outre en outre, comme le fait *a*, mais s'arrête à environ 5 mm de l'axe, où elle est terminée par un fond plat. De l'autre côté, il y a une ouverture correspondante; toutes les deux sont à l'intérieur entièrement enduites de noir de camphre. Dans l'axe de l'appareil, donc, pour ainsi dire, dans la cloison qui sépare les deux ouvertures *b*, est foré un trou vertical *t*, où peut se loger un thermomètre. En avant et en arrière de ce trou se voient trois canaux verticaux en forme de fentes, dont le n° 1 et le n° 3 ne descendent que très peu au-dessous de la face inférieure de *b*, tandis que le n° 2 se prolonge jusque au-dessous du côté inférieur de *a*. Dans les canaux n° 1, les plus rapprochés de *t*, on glisse les petits appareils *L*, qui portent les conducteurs sensibles; dans les n°s 2 se placent les plaques à fente variable *N*, pourvues vers le bas d'une ouverture ronde *o*, qui correspond à *a*, et sur laquelle est tendu un mince fil, tout juste dans le prolongementdu milieu

de la fente; dans les nos 3, enfin, peuvent être elevés et abaissés deux petits écrans doubles *P*, qu'un petit ressort *v* maintient en place lorsqu'ils ont été remontés. Les écrans et les plaques à fente sont polis du côté tourné vers le dehors, noircis du côté opposé.

Lorsque le cylindre est introduit dans le manchon, les ouvertures *a* et *b* viennent se placer exactement derrière deux conduits tubulaires dont le manchon est pourvu; ces conduits, formant en quelque sorte les prolongements de *a* et de *b*, ne sont pas visibles sur la figure, parce que le tuyau métallique *K* a été glissé devant le manchon. Ce tuyau *K* est fermé par un couvercle *D*, au bas duquel se trouve une petite lunette, pointée rigoureusement sur le fil tendu dans l'ouverture *o* du porte-fente *postérieur*. Le couvercle muni de sa lunette peut aussi être adapté au tuyau *K'*, lorsqu'on veut employer l'appareil dans l'autre sens. Le cylindre s'enfonce de quelques millimètres au-dessous du bord supérieur du manchon; l'espace restant est rempli par un couvercle d'ébonite, percé des ouvertures nécessaires pour qu'on puisse laisser descendre, à travers le couvercle, les appareils *L*, *N* et *P*: les petites plaques d'ébonite *l*, *n*, *p* viennent alors fermer ces ouvertures. Le cadre *L* est formé de deux fils de cuivre, qui sont unis l'un à l'autre par quatre baguettes d'ébonite et entre lesquels est disposé le conducteur sensible. Les bouts supérieurs de ces fils de cuivre sont repliés et serrés, au moyen de vis, dans les petites pièces de cuivre *U*, *V* et *W* fixées sur le couvercle, de sorte qu'un courant qui entre en *U* se partage entre *L* et *L'* et quitte l'appareil en *V* et *W*.

Le manchon est fixé sur une plaque d'ébonite *E*, elle-même vissée sur un cylindre vertical *F*. Celui-ci peut se mouvoir dans la douille *G*, qui l'embrasse étroitement et est fixée, dans une position bien perpendiculaire, sur la plaque de laiton *X*; à cette plaque est attachée, en dessous, la chape *Y*, dans laquelle se trouve l'écrou de la vis *Z*. Cette vis supporte donc tout le bolomètre et peut le faire monter et

descendre verticalement. Par suite de cette disposition, on est à même d'amener à volonté, sur tout point déterminé du spectre, soit le fil de pointage de l'ouverture *o*, soit le milieu de la fente *N*.

La plaque *X* peut glisser horizontalement, en avant et en arrière, sur deux règles solidement reliées l'une à l'autre et formant le bras mobile du spectromètre qui sera décrit plus loin.

Voyons maintenant quelles sont les propriétés que le petit conducteur, appelé à trahir par son changement de résistance l'accroissement de sa température, doit posséder pour répondre le mieux possible à cette destination.

D'abord, nous pouvons poser en fait que ce conducteur doit avoir une résistance d'environ 3 ohms. Ce nombre a été choisi parce que des expériences préliminaires avaient montré qu'une pareille résistance se laissait introduire sans inconvénient dans l'espace donné; dans la suite, je m'en suis tenu à cette valeur, pour faire construire, en concordance avec elle, les autres instruments — galvanomètre et cuve à compensation. Pour rester maniable, toutefois, ce conducteur ne doit pas être trop mince; les métaux doués d'une grande conductibilité électrique, tels que l'argent, le cuivre, l'or, sont donc d'emblée à rejeter comme matière première. Il est désirable, en outre, que la chaleur spécifique soit faible, surtout la chaleur spécifique à volume égal, parce que, dans la confection d'un conducteur aussi petit et aussi solide que possible, on est plus lié à un certain volume qu'à un certain poids. Suivant que, toutes choses égales d'ailleurs, cette chaleur spécifique à volume égal sera moindre, il faudra moins de chaleur pour produire une certaine élévation de température. A cette même fin, une grande conductibilité pour la chaleur offrira également quelque avantage. Ensuite, pour qu'un certain accroissement de température donne lieu à un grand changement de résistance, il convient que, dans la formule relative au pouvoir conducteur électrique, $K = K_2(1 - at + bt^2)$, le coefficient a soit grand. Jusqu'à quel point

différents métaux satisfont aux conditions qui viennent d'être indiquées, c'est ce qui ressortera du tableau suivant, dont les données sont empruntées à l'ouvrage de MM. Landolt et Börnstein, *Physikalisch-chemische Tabellen*, Berlin, 1883.

Métaux.	Poids spéc.	Chaleur spéc à		Conduct. cal. Ag. = 100	Conduct. élect. Hg. = 1	α.
		poids égal.	vol. égal.			
						0,00
Aluminium..	2,6	0.21	0,546	31,3	31,7 — 20	39
Cadmium ...	8,7	0,055	0,479	20,1	13,5	37—42
Or..........	19,3	0,03	0,579	53,2	44	37
Nickel	8,9	0,11	0,979	—	7,4	—
Platine......	21,5	0,03	0,645	8,4	8 — 6	32
Thallium....	11,8	0,03	0,354	—	5,2	41
Etain........	7,3	0,06	0,438	15,2	9	40
Fer.........	7,8	0,11	0,858	11,9	8	45
Zinc.......	7,1	0,09	0,639	28,1	16	42

Il y a toutefois encore une couple de conditions importantes, d'ordre plus pratique, qui se laissent difficilement réduire en tableaux : la matière à choiser doit, en effet, conserver inaltérée à l'air sa surface métallique, et on doit pouvoir la mettre aisément sous la forme de bandelettes très minces, et pourtant suffisamment solides, parce que sous cette forme elle présentera, à petite section, une grande surface au rayonnement. Le choix semblait restreint entre le nickel, le platine, l'étain et le fer. Beaucoup d'expériences préliminaires furent faites avec l'étain en feuilles battues, dont je dus confectionner de petites grilles, qui conduisaient le courant en zigzag de l'un des fils de cuivre à l'autre. Cette forme était nécessaire, parce que, suivant un chemin plus court, je ne pouvais obtenir une résistance de 3 ohms, à moins de rendre les bandelettes excessivement étroites et, par suite, d'un

maniement impossible; la feuille d'étain avait encore, en effet, une épaisseur d'environ $0^{mm},008$, et les autres métaux ne se laissaient guère réduire mécaniquement en feuilles beaucoup plus minces et conservant néanmoins une cohérence suffisante. Enfin, j'eus la chance d'entrer en possession d'une théière nickelée, dont la couche de nickel se détachait facilement. Les lamelles de nickel qu'elle me fournit étaient assez solides et n'avaient pas plus de $0^{mm},002$ d'épaisseur. A l'aide d'un couteau très-tranchant, j'en découpai, sur un morceau de verre à glace, des bandelettes qui mesuraient environ $0^{mm},3$ de largeur sur plus de 20^{mm} de longueur, et, après mainte tentative infructueuse, je réussis à souder ces bandelettes, préalablement recouvertes sur l'une de leurs faces d'un dépôt uniforme de noir de camphre, aux deux fils de cuivre qu'on voit faire saillie à l'intérieur du cadre *L* (fig. 2).

La longueur de la bandelette, entre les deux points de soudure, est de 14^{mm}, et la résistance devrait donc, si toutes les dimensions et le pouvoir conducteur avaient été déterminés tout à fait rigoureusement, être égale à

$$\frac{0,014}{0,3 \times 0,002 \times 7,4} = 3,15 \text{ unités de Siemens.}$$

J'ai construit deux de ces systèmes, pour la résistance desquels j'ai trouvé expérimentalement:

premier système	second système
3,04 et 3,03 ohms,	2,90 et 2,89 ohms,

nombres qui s'accordent assez bien avec la valeur obtenue par estime. Le second de ces systèmes a servi dans mes expériences; il a fonctionné pendant des mois, sans modification appréciable.

b. Les résistances compensatrices.

Sous ce nom je désignerai les résistances qui doivent être introduites dans les deux autres branches de la combinaison de Wheatstone, et dont le rapport doit pouvoir être réglé

de façon qu'aucun courant ne traverse le galvanomètre intercalé dans le pont.

Il faut, naturellement, que ces résistances soient mises, avec le même soin que les deux bandelettes bolométriques, à l'abri de variations inégales de la température, car une légère augmentation de l'une d'elles se répercute immediatement sur le galvanomètre. A cet effet, elles sont placées dans une cuve en zinc (fig. 3), remplie de liquide. Une coupe horizontale de cette cuve, environ au niveau indiqué par la ligne pointillée *h*, est représentée dans la fig. 4. Le courant bifurqué, qui arrive des pièces métalliques *V* et *W* fixées sur le couvercle du bolomètre, entre dans la cuve par l'intermédiaire des vis de serrage en cuivre rouge *p* et *q*, auxquelles sont également attachés les fils galvanométriques *g* et qui passent, protégées par une matière isolante, à travers la paroi de la cuve en zinc. De *q*, une épaisse bande de cuivre conduit le courant à l'extrémité *d* d'une longue augette à mercure k_1, qui est reliée, par un chevalet en platine *b* mobile à l'aide du curseur S_1 (fig. 3), à une augette à mercure k_2, accolée à la première; k_1 et k_2 sont des cannelures profondes dans une pièce d'ébonite. En *e*, le courant passe dans un fil de platine assez mince, tendu en zigzag le long d'une plaque d'ébonite *f* placée verticalement, et aboutissant en *i*. L'autre branche du courant, qui pénètre dans la cuve en *p*, se rend directement par une bande de cuivre à la plaque d'ébonite, circule le long de cette plaque par un fil de platine de même longueur que le précédent, et atteint ensuite le point *j*, qu'un fil de platine fortement tendu relie au point *i*. Les deux branches du courant se rencontrent en quelque point de ce fil, d'où elles sont ramenées à la pile par l'intermédiaire de la cuvette à mercure mobile k', du curseur S_2 (fig. 3) et du fil de cuivre *l*. Il est clair que, grâce à cette disposition, on peut faire varier entre d'assez larges limites le rapport des deux résistances, en déplaçant simplement la cuvette k' le long de ij; un réglage plus précis peut

ensuite s'obtenir en faisant glisser le chevalet b, ce qui rend l'un des deux circuits un peu plus long ou plus court.

Le niveau n (fig. 3) est calé de telle sorte que la bulle vient se placer entre ses repères lorsque le fond des longues augettes à mercure est horizontal.

Les mesures de résistance, suivant la méthode de Wheatstone, s'exécutent le plus exactement lorsque, dans les six lignes du quadrilatère complet, les résistances sont à peu près égales [1]). Ce cas se trouve réalisé, approximativement, dans mon appareil.

La fig. 3 donne une représentation schématique de la marche du courant; on y a:

Up	$= 2{,}90 + 0{,}095$	$= 2{,}995$	ohms à 10° C.
Uq	$= 2{,}89 + 0{,}095$	$= 2{,}985$	„ „ „ „
pj		$= 2{,}019$	„ „ „ „
qi (sans augettes à mercure)		$= 1{,}974$	„ „ „ „
ij		$= 0{,}404$	„ „ „ „

d'où l'on déduit que $p\,k'$ et $q\,k'$ s'élèveront chacune à environ 2,2 ohms.

Les résistances dans la cuve se sont donc trouvées un peu plus petites que celles dans le bolomètre, mais il est très douteux que ce soit là un désavantage, dans les circonstances données.

Le fil de réglage ij a 365 mm de longueur; 1 mm de déplacement de la cuvette à mercure rend donc l'une des résistances plus grande de 0,0011 ohm, l'autre plus petite de la même quantité.

Lorsqu'on fait glisser le chevalet b de 300 mm, il en résulte un changement de résistance d'environ 0,0125 ohm, de sorte que 1 mm correspond à 0,00004 ohm. Le curseur S_1 (fig. 3),

---

1) La combinaison de Wheatstone a été décrite en détail, entre autres, par Maxwell, *An elementary Treatise on electricity*, p. 186; — Chrystol, *Encyclopaedia Brittannica*, article „Electricity"; — Gray, *Phil. Mag.* [5], 12, p. 283 (1881); — Frölich, *Wied. Ann.*, XXX, p. 156; — H. Weber, *Wied. Ann.*, XXX, p. 638.

auquel *b* est uni par une petite tige d'ébonite, se laisse déplacer à l'aide d'une vis micrométrique par rapport à la pièce S'_1, qui à cet effet est préalablement fixée au moyen d'une vis de serrage. De cette manière, on est à même de faire varier la résistance insensiblement, par millionièmes d'ohm. Les règles en cuivre sur lesquelles glissent S_1 et S_2 sont isolées de la cuve en zinc par des supports d'ébonite.

Pour maintenir à une température égale les deux longs fils de platine et surtout les points de contact de métaux différents, à l'intérieur de la cuve, celle-ci fut remplie d'un liquide qui, avec peu de conductibilité électrique, devait posséder, si possible, une bonne conductibilité pour la chaleur, une mobilité suffisante et une chaleur spécifique considérable. Le liquide qui satisfaisait le mieux à ces condition était l'essence de térébenthine.

---

c. Le galvanomètre.

Le cabinet de physique de l'université ne possédait pas de galvanomètre assez sensible pour l'étude projetée, et l'achat d'un pareil instrument étant donc nécessaire, M. le professeur Buys Ballot voulut bien me laisser entièrement libre dans le choix. Le modèle de Thomson, si généralement en usage, a ses inconvénients propres, dont le principal est sans doute la longueur insuffisante du fil de cocon.

De même que M. Langley, j'aurais donc été obligé, pour augmenter autant que possible la sensibilité, de faire tout d'abord des changements à cet instrument dispendieux. Mais il y a encore autre chose. La construction du galvanomètre de Thomson implique que le miroir ne saurait être grand; l'insuffisance de lumière et d'étendue du champ visuel sera donc un obstacle à la lecture, à grande distance, de la graduation d'une échelle. Or, je voulais utiliser le mieux possible l'espace disponible, en plaçant l'échelle loin du galvanomètre:

dans ce cas, en effet, on peut mesurer des déviations moindres et il y a, en outre, plus de garanties pour la proportionnalité complète entre l'indication et l'intensité du courant L'une et l'autre raisons me déterminèrent à tenter l'expérience avec un instrument encore peu connu, le microgalvanomètre de Rosenthal, dont on trouve la description dans *Wiedem. Annalen*, XXIII, p. 677, et qui est fourni par M. Edelmann. Dans sa forme originelle, cet appareil ne possédait qu'une seule aiguille aimantée et avait une résistance d'environ 20 ohms ; mais il pouvait aussi être construit avec une système astatique, et la disposition en était telle que les bobines de fil se laissaient très facilement remplacer par d'autres. Je commandai donc un pareil galvanomètre astatique, à 2 jeux de bobines, dont l'un devait avoir une résistance faible, savoir, en accord avec les autres résistances de mon circuit, d'un peu moins de 3 ohms, tandis que le second présenterait une résistance de quelques centaines d'ohms, pour rendre l'instrument d'une application aussi large que possible. Comme le modèle qui me fut envoyé s'éloigne un peu de la forme primitive, je vais donner une briève description de ses parties caractéristiques.

Un fil de cocon de 260^{mm} de longueur, fixé à un bouton de torsion, porte le système astatique fig. 6, composé de deux aiguilles recourbées en forme de *S*. Aux côtés plats du système sont appliquées deux lames très minces de mica, et vers le haut se trouve un mince miroir plan, d'environ 20^{mm} de diamètre. Les extrémités polaires des aimants, latéralement recourbées, peuvent se mouvoir à l'intérieur des quatre bobines, dont deux sont indiquées par r et r' dans la fig. 7 (coupe horizontale du galvanomètre); les lames de mica se meuvent alors dans deux chambres ayant la forme de secteurs, ce qui donne un très bon amortissement. On peut mettre les quatre bobines à la suite l'une de l'autre dans le circuit, et la résistance est alors de 2,747 ohms. Mais il est facile aussi de modifier les liaisons de manière que les bobines soient placées dans

le circuit ou bien accolées deux à deux, ou bien accolées toutes les quatre; le second jeu de bobines étant susceptible de recevoir les mêmes dispositions variées, il en résulte que notre galvanomètre peut être employé avec 6 valeurs différentes pour la résistance intérieure, suivant la nature des expériences à exécuter.

De la fig. 7 il ressort aussi que, pour le bon fonctionnement du galvanomètre, il est nécessaire de placer le porte-bobines, qui peut tourner, de façon que les pôles des petits aimants se trouvent aussi exactement que possible dans le milieu des bobines lorsque le galvanomètre est au repos. Aussitôt, en effet, que la position d'équilibre ne satisfait pas à cette condition, un courant dirigé dans l'un des sens produit une déviation plus grande que le même courant dirigé dans le sens contraire. Or, la recherche de cette installation symétrique présente quelques difficultés, parce qu'on ne peut tourner le porte-bobines qu'à la main et au jugé. C'est là, sans doute, un défaut de l'instrument, mais auquel il serait facile de remédier par l'addition d'une vis tangentielle. Je me suis contenté, toutefois, de l'état existant, et ai cherché la position symétrique par voie de tâtonnement.

L'échelle est en verre, longue de 1^m et divisée en millimètres. Elle est placée à $6^m,5$ du galvanomètre, de sorte que, si l'image de l'échelle, vue dans le miroir du galvanomètre, se déplace de une division, les aiguilles aimantées n'auront pas même été déviées de 16″. L'éclairage se fait par une petite lampe à pétrole et à l'aide d'un grand miroir concave, d'environ $0^m,6$ de diamètre; celui-ci est placé immédiatement derrière l'échelle et disposé de manière que l'image qu'il forme de la flamme tombe sur le miroir du galvanomètre. Vu de ce point, le miroir concave tout entier est donc brillamment éclairé, et, par suite, il en est de même de l'échelle. La lumière est si éclatante que, dans la lunette de lecture à fort grossissement, placée à environ 3^m du galvanomètre, on peut distinctement reconnaître les divisions et en estimer

les dixièmes, même lorsque le soleil donne dans la chambre et que les deux yeux sont tenus ouverts.

Naturellement, on ne peut utiliser que la partie de l'échelle qui se trouve devant le grand miroir et qui, pour moi, s'étendait de la division 200 à la division 800.

Il convient de remarquer encore que derrière le galvanomètre est disposé un grand barreau aimanté, destiné à affaiblir l'action du magnétisme terrestre. En rapprochant ou éloignant ce barreau, on peut régler la sensibilité de l'appareil; en le tournant, on change la position d'équilibre.

Le galvanomètre étant introduit dans le pont, l'aiguille prendra une certaine position, que nous appellerons *position zéro;* dans le cas idéal, seulement, où absolument aucun courant ne traverse le pont, cette position zéro coïncide avec la position d'équilibre. Il est à prévoir qu'avec un galvanomètre extrêmement sensible, placé dans un système de conducteurs traversés par un courant relativement fort, la position zéro pourra aisément subir de lents changements, et il serait incommode d'avoir chaque fois à la ramener aussi près que possible de la position d'équilibre. Mais, pour qu'il soit indifférent à partir de quelle position zéro on détermine les déviations causées par les rayons tombant sur le bolomètre, il est nécessaire et suffisant que ces déviations puissent être regardées comme *exactement* proportionnelles à l'intensité du courant. Je devais donc m'assurer de cette proportionnalité.

A cet effet, on fit passer le courant d'un élément de Daniel par un banc de résistance et par une longue augette à mercure. Dans cette dernière plongeaient, en deux points entre lesquels il y avait une résistance de 0,0005 ohm, les fils du galvanomètre, dont le circuit contenait un commutateur. La direction du courant principal pouvait également être changée.

Dans le circuit principal furent alors introduites des résistances qui étaient entre elles comme $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \ldots\ldots : \frac{1}{15}$, de sorte que les intensités devaient être dans les rapports

1 : 2 : 3 . . . . . : 15. Pour donner une idée du degré d'exactitude auquel ce galvanomètre permet d'atteindre, je communique ici les résultats de l'expérience.

Résistance.	Intensité du courant.	Déviation		Différence.	Résistance.	Intensité du courant.	Déviation		Différence.
		observée.	calculée.				observée.	calculée.	
168	15	$269\frac{3}{8}$	$268\frac{1}{8}$	$+1\frac{1}{4}$	360	7	125	$125\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
180	14	$250\frac{5}{8}$	$250\frac{1}{4}$	$+\frac{3}{8}$	420	6	107	$107\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
193,8	13	233	$232\frac{3}{8}$	$+\frac{5}{8}$	504	5	$89\frac{1}{8}$	$89\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
210	12	$214\frac{7}{8}$	$214\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}$	630	4	72	$71\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
229,1	11	$196\frac{7}{8}$	$196\frac{5}{9}$	$+\frac{1}{4}$	840	3	$53\frac{1}{2}$	$53\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$
252	10	$178\frac{5}{8}$	$178\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	1260	2	$35\frac{3}{4}$	$35\frac{3}{4}$	0
280	9	161	$160\frac{7}{8}$	$+\frac{1}{8}$	2520	1	$17\frac{7}{8}$	$17\frac{7}{8}$	
315	8	$142\frac{1}{2}$	143	$-\frac{1}{2}$					

La seconde colonne donne les nombres proportionnels à l'intensité du courant, la troisième contient les moyennes de 4 déviations, qui n'ont jamais différé entre elles de plus de $1\frac{1}{2}$ divisions de l'échelle. Ces différences étaient dues à un lent déplacement de la position d'équilibre, qui lui-même provenait de variations du magnétisme terrestre, et qui, dans le cours des 3 heures consacrées à cette série d'expériences, s'éleva à peine à 14 divisions. Dans la quatrième colonne on trouve les multiples de $17\frac{7}{8}$, dans la cinquième, les différences entre ces multiples et les valeurs observées. Le fait que, au début, toutes ces différences sont positives, tient à ce que le couple avait alors plus de force ; car la première mesure, répétée à la fin de la série, donna $267\frac{1}{2}$, par conséquent une différence de — $\frac{5}{8}$. La complète proportionnanalité entre la déviation de l'aiguille et l'intensité du courant est donc garantie.

Pour ce qui concerne la sensibilité en mesure absolue, on peut la déduire de l'une des observations. Prenons, par exemple, le cas où la déviation était de $53\frac{1}{2}$ mm. La différence de potentiel, aux points où plongeaient les fils galvanomé-

triques, s'élevait alors à environ $\frac{0,0005}{840}$ × la force électromotrice d'un élément de Daniel, c'est-à-dire, à environ $\frac{0,0005}{840}$ volt. La résistance de tout le circuit galvanométrique étant supposée égale à 3 ohms, on trouve pour l'intensité du courant $\frac{0,0005}{840 \times 3} = 0,000\,000\,198$ ampère, de sorte que 1 mm de déviation correspondait à 0,000 000 0037 ampère.

Dans les expériences de M. Langley, une intensité de 0,000 000 000 5 ampère donnait une déviation de 1 division de l'échelle; mais aussi la résistance de son galvanomètre s'élevait à 20 ohms, de sorte qu'il avait besoin d'une plus grande différence de potentiel que moi, pour obtenir un même courant dans le galvanomètre. Parmi les galvanomètres sensibles offerts par le commerce, il n'avait pas réussi à en trouver un qui fût capable de déceler nettement des variations de moins de 0,000 001 ampère. Le microgalvanomètre de Rosenthal fait donc, on le voit, une heureuse exception.

Il est clair que, dans un instrument aussi sensible, une disposition pour régler le courant par dérivation (*shuntbox*) était indispensable, et, en outre, que toutes les précautions possibles devaient être prises pour éviter l'apparition de courants thermo-électriques. Ces précautions consistèrent à faire en cuivre rouge *tout* le circuit entre U et k' (fig. 5), pour autant qu'il était exposé directement à l'air extérieur; des contacts de métaux hétérogènes ne se trouvaient (sauf dans le bolomètre, où ils étaient suffisamment préservés) qu'à l'intérieur de la cuve remplie de térébenthine et dans le galvanomètre lui-même. Ce dernier, en conséquence, fut entouré, au-dessous du miroir, d'un cylindre de verre sur lequel on avait collé du papier; par là se trouvaient atténuées les variations locales de la température, dues au rayonnement ou à des courants d'air. La boîte à dérivation indiquée par n dans la fig. 5, et le commutateur qui y est relié ne contiennent

également que des conducteurs en cuivre rouge. Comme dérivations on peut introduire, au moyen d'un bouchon, des résistances de 0,003, 0,030 ou 0,333 ohm, tandis que deux autres bouchons servent à interrompre le courant galvanométrique ou à en déterminer la direction.

---

d. La pile et le courant primaire.

Une pile constante est absolument nécessaire. Avec des couples de Grove, il m'a été impossible de maintenir le galvanomètre en repos, même pendant quelques minutes : au bout de peu de temps, l'échelle divisée tout entière avait disparu du champ de la lunette. La cause en est évidente. Lorsque, en effet, le courant change d'intensité, cela influe sur la température des conducteurs, surtout sur celle des bandelettes bolométriques, et, celles-ci n'étant pas parfaitement identiques, leur rapport sera modifié, d'où résulte naturellement du *drift* dans le galvanomètre. Une pile de 12 éléments Meidinger, placés six à six, atteignit mieux le but. La résistance intérieure de cette pile est de 3 ohms, la force électromotrice, de 2 volts. Des mois entiers elle a fonctionné presque sans interruption, et l'intensité du courant est restée presque exactement constante. (Lorsque les observations étaient finies, on n'interrompait pas le courant, mais on se contentait de l'affaiblir, afin d'empêcher la diffusion du $Cu\,S\,O_4$ dans le $Mg\,SO_4$.) L'intensité du courant primaire peut être réglée à volonté au moyen d'un rhéostat *R* (fig. 5), et estimée d'après la déviation d'une boussole des tangentes *T*, qui est introduite, en dérivation, en deux points du circuit primaire dont la distance est choisie de manière à obtenir des déviations convenables.

L'intensité que j'ai le plus employée dans les observations était d'environ 0,133 ampère.

---

e. Le spectromètre.

Lorsque je conçus le plan de faire des recherches sur la distribution spectrale de la chaleur de sources obscures, rien ne m'était encore connu d'une manière certaine quant aux longueurs d'onde de pareils rayons; en conséquence, je me proposai d'essayer, à l'aide d'un grand miroir à diffraction de Rowland, sembable à celui dont M. Langley s'était servi pour le spectre solaire, de déterminer la relation entre la longueur d'onde et la réfrangibilité de ces rayons calorifiques obscurs. J'entrai donc en correspondance avec M. J. A. Brashear, demeurant alors à Pittsburg, le fournisseur des „Rowland's *concave gratings*". M. Brashear me renseigna au sujet des exemplaires disponibles [1]), mais m'écrivit que M. le professeur Rowland faisait difficulté de construire un pareil miroir avec moins de 300 traits au millimètre „because he did not like to make *deep* curves"; or j'en avais demandé tout au plus 150, vu qu'autrement les rayons à grande longueur d'onde ne pourraient arriver à interférer. Je savais déjà, à ce moment, que des réseaux d'un aussi petit nombre de traits avaient été construits pour M. le professeur Langley, et j'espérais donc pouvoir décider encore M. Brashear à me fournir une plaque de ce genre.

Peu après, toutefois, parut le travail de Langley [2]), dans

---

[1]) Un miroir concave diffringent de 6 cm. de diamètre et d'environ 600 traits au millimètre, que notre Laboratoire a acheté pour l'étude du spectre lumineux, surpasse de beaucoup un grand spectroscope de Browning à dispersion de 12 prismes, aussi bien en netteté des raies de Fraunhofer qu'en intensité lumineuse.

[2]) Langley, *On hitherto unrecognized wavelengths*, dans *Am. Journ. of Sc.*, Jan. and Aug. 1886; *Phil. Mag.*, Aug 1886.

M. Langley n'est pourtant pas le premier qui ait constaté l'existence de ces grandes longueurs d'onde. En 1880 furent publiées des recherches de MM. Desains et Curie (*Comptes rendus*, XC, p. 1506), dans lesquelles avaient été mesurées, à l'aide d'une grille à inflexion, des longueurs d'onde allant jusqu'à $\lambda = 7^{\mu},00$. Mais les déterminations de M. Langley sont incontestablement beaucoup plus exactes.

lequel la courbe de dispersion du sel gemme était établie jusqu'à $5^{\mu},3$; je pourvais donc me regarder comme déchargé de cette partie de la tâche — partie qui eût certainement été la plus délicate — et m'en tenir au spectre prismatique.

En rapport avec les dimensions des plus grands prismes et lentilles de sel gemme qui pouvaient être obtenus dans les ateliers de MM. le Dr. Steeg et Reuter, à Hombourg, je fis construire un spectromètre dont le bras mobile fût capable de porter, sans subir de flexion sensible, le poids du bolomètre complet, poids qui s'élevait à plus de 2 kilogrammes. Comme base de cet appareil fut utilisé un vieux et solide instrument universel de Troughton & Simms, qui appartenait à notre Observatoire mais se trouvait depuis bien des années, hors de service, dans le Cabinet de physique. Du consentement de M. le professeur Oudemans, directeur de l'Observatoire, l'instrument fut temporairement débarrassé de sa lunette et de son cercle vertical, et quelques trous de vis furent forés dans les colonnes A et A' (voir fig. 8), afin de pouvoir y fixer les barres métalliques dont l'ensemble devait former le support du bolomètre. Le cercle horizontal, dont le diamètre mesurait environ 380^{mm}, était divisé en arcs de $5'$, et deux microscopes, pourvus de micromètres filaires et fixés aux colonnes, permettaient la lecture à $1''$ près.

A quelques centimètres en dehors du bord du cercle, mais invariablement unie à celui-ci par une pièce métallique, fut disposée une solide colonne verticale. Dans la figure, cette colonne n'est pas visible ; elle se trouve à gauche, en dehors du champ du dessin, et porte, sur la barre de fer B, à section en T, tout ce qui appartient au collimateur du spectromètre. C'est, en premier lieu, l'appareil à fente.

Les deux parois de la fente, mobiles l'une par rapport à l'autre de la manière ordinaire, au moyen d'une vis et d'un ressort, consistent en cuvettes en cuivre, munies chacune de deux petits tubes, de sorte qu'on peut y faire couler de l'eau. Cette précaution était nécessaire pour donner la certitude

que les parties voisines de la fente n'éprouveraient pas, de la part des sources de chaleur placées à peu de distance en arrière, un échauffement persistant. Le long de la plaque de cuivre qui sur la face regardant la lentille collimatrice porte les cuvettes de la fente, peut, sur l'autre face, se mouvoir alternativement dans les deux sens un écran en cuivre, à l'intérieur duquel circule également de l'eau et qui, retenu d'un côté par un ressort en spirale, masque la fente. Cet écran, toutefois, possède une ouverture allongée, et celle-ci vient se placer devant la fente dès qu'on tire l'écran en sens contraire de l'action du ressort. Tout ce dispositif glisse sur la barre *B* et peut ainsi, par un mouvement en avant ou en arrière, être amené au foyer de la lentille collimatrice.

Des soins particuliers ont été apportés à la protection permanente des préparations de sel gemme contre l'humidité de l'air. Le prisme et les lentilles devant rester, des mois entiers, prêts à servir, cette protection était absolument nécessaire; de fait, les mesures prises furent assez efficaces pour que, en 6 ou 7 mois de temps, les préparations n'aient eu besoin d'être repolies qu'une seule fois. Le prisme et les deux lentilles, en effet, sont placés à l'intérieur d'un cylindre en cuivre (fig. 9), espèce de tambour, qui peut se visser, de manière à être exactement fermé, sur un fond circulaire *C* (fig. 8), lequel est lui-même fixé au bras bolométrique, juste au centre de l'instrument, entre les deux colonnes. Sur ce fond s'élève, du côté du bolomètre, le support *d* de la lentille objective, tandis qu'au centre se trouve une petite table tournante *e*, sur laquelle peut être fixé le prisme. Par une simple combinaison de tiges *l m n*, cette table est reliée à un point *p* du porte-bolomètre et un point *q* du porte-collimateur, de telle sorte qu'elle tourne toujours d'un angle égal à la moitié de celui dont on fait mouvoir le bolomètre. Il en résulte que le prisme, une fois placé au minimum de déviation pour des rayons d'espèce déterminée, conservera cette position pour tous les autres rayons.

Le fond C présente encore une longue ouverture courbe oo', sur laquelle s'applique en dessous une plaque P fixée au porte-collimateur, de sorte que l'ouverture reste fermée quelle que soit la position du bras mobile. Sur cette plaque, et passant à travers l'ouverture, est fixé le support d' de la lentille collimatrice. Celle-ci est donc aussi placée à l'intérieur du cylindre, mais n'en partage pas le mouvement. Au cylindre (fig. 9) est adaptée, du côté du bolomètre, une pièce plate et carrée, dans laquelle se trouve une ouverture circulaire, qui correspond à la lentille objective et peut être fermée exactement au moyen d'une glace qu'on glisse dans la rainure de la pièce. Du côté du collimateur, il y a également une ouverture dans la paroi du cylindre, mais elle est allongée horizontalement, de sorte qu'une partie en est toujours tournée vers le collimateur, de quelque manière que la déviation varie entre 0° et 45°. Cette ouverture tout entière reste constamment fermée par une plaque courbe (fig. 10), qui s'applique exactement à la paroi du cylindre, contre laquelle elle est pressée par les ressorts v et v', qui en outre la fixent au porte-collimateur. Tout comme le cylindre lui-même, cette plaque possède une pièce carrée, à ouverture circulaire munie d'une glace; cette pièce-ci, bien entendu, correspond à la lentille collimatrice. Un couvercle très juste ferme le cylindre par en haut; en l'enlevant, on peut facilement atteindre aux préparations de sel gemme. Une cuvette, placée sur le fond, contient des fragments d'hydrate de potasse, qui, renouvelés de temps en temps, maintiennent la sécheresse à l'intérieur du tambour.

Les deux lentilles et le prisme se trouvent donc dans un espace qui reste constamment séparé de l'air extérieur, mais néanmoins l'une des lentilles se meut avec le bras bolométrique, tandis que l'autre demeure en place et que le prisme est maintenu automatiquement dans la position de déviation minima.

Pour la partie lumineuse du spectre, on peut opérer la

mise au point sans enlever les lames de glace; mais celles-ci doivent être remontées lors des observations dans le spectre obscur. Dans ce dernier cas, les préparations de sel gemme sont plus exposées à des courants d'air. Même alors, toutefois, l'air humide de la chambre ne peut guère circuler dans le cylindre, parce que, entre celui-ci, le bolomètre et le dispositif à fente, il y a des tuyaux de cuivre, qui entourent le chemin des rayons. Ces tuyaux, de même que le cylindre, sont noircis à l'intérieur.

---

f. Les préparations de sel gemme.

Celles-ci proviennent, comme il a déjà été dit, de la fabrique de MM. le Dr. Steeg et Reuter, à Homburg v/d Höhe. La hauteur du prisme est de 52 mm, son côté de 40 mm, tandis que les lentilles possèdent un diamètre de 60 mm et des rayons de courbure de 300 mm. Placé sur un spectroscope de Steinheil, temporairement transformé en spectromètre par l'addition d'un cercle bien divisé et muni de trois verniers, le prisme montrait les principales raies de Fraunhofer très distinctement, quoique avec moins de netteté que ne le fait un prisme de verre. Dans la mesure de l'angle réfringent, toutefois, une grande difficulté se présenta; on reconnut que le prisme ne possédait pas d'angle réfringent déterminé, vu que les faces latérales étaient légèrement sphériques. Après que ce défaut eut été corrigé et que les faces eurent été soigneusement polies [1]), le prisme satisfaisait à toutes les

[1]) Pour dresser les faces réfringentes convexes, je me servis de papier d'émeri très fin, tendu sur une glace. Le polissage eut ensuite lieu sur une glace revêtue de toile de coton blanche (croisé), sur laquelle était répandue un peu de potée d'étain qu'on humectait modérément d'alcool absolu. Sous une pression succesivement décroissante, je promenais le prisme en tous sens sur cette surface, jusqu'à ce que l'alcool fût presque entièrement évaporé. L'opération réussissait le mieux lorsqu'on l'exécutait à la lumière

exigences raisonnables. L'angle réfringent mesurait maintenant 59°53′20″, et, comme moyennes de deux déterminations, j'obtins pour les indices de réfraction de quelques raies de Fraunhofer, à 10° C, les valeurs inscrites dans la seconde colonne du tableau suivant. La première colonne contient les déviations trouvées. Pour faire ressortir les bonnes qualités du prisme, je reproduis dans les troisième et quatrième colonnes les valeurs qui reviennent à ces indices, à deux températures différentes, d'après M. Stefan.

Angles de déviation à 10° C.	Indices de réfraction à 10° C.	Indices de réfraction d'après M. Stefan.	
		à 17° C.	à 22° C.
C 40° 39′ 13″	1,54074	1,54050	1,54032
D 40° 58′ 53″	1,54440	1,54418	1,54400
E 41° 24′ 40″	1,54918	1,54901	1,54882
b 41° 29′ 48″	1,55012		
F 41° 47′ 36″	1,55341	1,55324	1,55304
G 42° 32′ 15″	1,56159	1,56129	1,56108

On voit que les nombres de la seconde colonne surpassent ceux de M. Stefan à peu près de la quantité qui correspond à la différence de température.

Le rayon de courbure des lentilles étant donné, savoir 300 mm

---

solaire directe et que les doigts en contact avec la préparation étaient recouverts de caoutchouc

On jugeait du degré d'avancement du travail en plaçant le prisme sur le spectroscope et examinant l'image réfléchie de la fente. Tant que, pour voir nettement cette image, on devait encore allonger la lunette mise au point pour les rayons parallèles, la sphéricité n'était pas corrigée.

Les lentilles furent polies de la même manière; pour bassin, je pris un morceau de bois à surface concave de même courbure que les faces convexes des lentilles; la cavité était tapissée de coton, fixé à la colle.

la distance focale relative à la lumière du sodium s'obtiendrait par la formule connue:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = 0{,}5444 \times \frac{2}{300},$$

d'où $$f = 275{,}53.$$

Expérimentalement, j'avais déjà trouvé: $f_D = 276$ mm.

Le spectrobolomètre n'est pas placé de façon qu'on puisse aisément y projeter la lumière solaire; je n'ai donc pu me convaincre si, en combinaison avec les lentilles de sel gemme, le prisme pouvait encore faire apparaître les raies de Fraunhofer; mais, d'une fente dont la largeur était au-dessous de $\frac{1}{20}$ mm et qu'éclairait une flamme de sodium, le système formait une image nette, parfaitement limitée, malgré les grandes dimensions des lentilles. Je n'ai pas réussi, toutefois, à séparer les deux lignes *D*, peut-être parce que le grossissement de la lunette était trop faible.

---

g. Aperçu de l'installation des instruments.

La fig. 11 donne une idée de la manière dont les différents instruments sont installés.

Les lettres *A*, *B*, *C*, *D* et *E* indiquent cinq piliers en maçonnerie, encastrés dans les fondements et indépendants du plancher. *A* porte le galvanomètre, *E* l'échelle divisée *S* et le grand miroir concave placé derrière elle; en *v* est la flamme, dont le miroir forme une image sur le galvanomètre. La lunette de lecture se trouve sur le pilier *B* et est indiquée par *k*, tandis que les dérivations sont placées en *n*. Sur *C* est installé le bolomètre.

L'observateur, assis entre *B* et *C*, devant la table *T*, doit pouvoir, de sa place, mouvoir le spectromètre et en reconnaître constamment la position. A la première de ces deux fins, la vis de rappel du spectromètre est munie d'une longue clef

de vis, telle qu'on en trouve aux lunettes astronomiques; pour satisfaire à la seconde condition, le tambour des préparations de sel gemme porte sur son couvercle un prisme à réflexion totale (voir fig. 9), dont une des faces est sphérique, et qui forme sur l'échelle S' l'image d'un fil d, tendu sur le pilier D. L'entourage de ce fil est fortement éclairé par une lampe placée derrière lui et dont les rayons sont rendus sensiblement parallèles par une lentille. Lorsqu'on fait tourner le spectromètre de 1′, l'image du fil se déplace juste de 2 mm sur l'échelle S', qui pour cela est éloignée de $3^m,44$ du centre du spectromètre. Ces déplacements peuvent être observés à l'aide de la lunette k' établie sur la table T. La lecture des microscopes du spectromètre n'a lieu que pour contrôler de temps en temps l'indication de l'image sur l'échelle.

Les lignes pointillées marquent le cours des communications conductrices. De la pile, le courant se dirige vers un commutateur c, de là, à travers un rhéostat R et un fil tendu ef, vers le bolomètre. Sur ef s'embranchent les fils de la boussole des tangentes T_1, qui doit indiquer l'intensité du courant primaire; la lecture de cette indication s'opère à l'aide de la lunette k'' et de l'échelle S''. En sortant du bolomètre, le courant se rend par deux fils (enfermés dans un tube de plomb, pour assurer l'uniformité de leur température) aux vis de pression p et q de la cuve à compensation, où aboutissent aussi les fils du galvanomètre; de là, à travers le commutateur c, il retourne à la pile.

Près du pilier C, du côté du collimateur, se trouve un pied solide, mobile, sur lequel peuvent être placées les différentes sources de chaleur avec leurs accessoires.

De cette manière, la conduite des divers appareils est donc presque entièrement au pouvoir de l'observateur, tranquillement assis devant ses lunettes. Cette précaution était nécessaire, parce que les mouvements de personnes à travers la chambre, surtout au voisinage du bolomètre, donnaient lieu à des écarts très gênants du galvanomètre.

Notons encore que, d'après une expérience faite incidemment, la sensibilité du bolomètre, par unité de surface, était environ 36 fois plus grande que celle de la meilleure pile thermo-électrique qui se trouvât au Cabinet. Cette sensibilité peut encore être augmentée notablement, en renforçant le courant primaire; mais alors croît aussi l'influence perturbatrice des variations dans la pile ou dans la température des conducteurs, de sorte qu'il faudrait prendre des précautions plus minutieuses. Pour la plupart des expériences, d'ailleurs, une sensibilité même moindre était suffisante, et elle était alors choisie de préférence, comme donnant plus de garanties pour la stabilité de la position zéro.

OBSERVATIONS.

---

a. Remarques générales sur les observations.

L'indice de réfraction du sel gemme change assez fortement avec la température, — un accroissement de 5° C. correspond à près de 1′ de diminution de la déviation, — et comme, pendant la durée du travail, la température de la chambre varia entre 8° C. et 25° C., il pouvait en résulter, dans l'angle de déviation des rayons d'une espèce déterminée, des différences de plus de 3′. Mais pour rendre les observations, faites à des températures différentes, parfaitement comparables entre elles sans la moindre réduction, et être en outre indépendant de modifications possibles dans la position zéro du spectromètre, on n'a qu'à procéder de la manière suivante.

Au début de chaque série d'expériences, on fait monter le bolomètre, à l'aide de la vis qui le porte, jusqu'à ce que la petite lunette arrive à la hauteur de l'axe optique; ensuite, on cherche l'image de la fente éclairée par une flamme de

sodium, et on la met en coïncidence avec le fil sur lequel la lunette est pointée. Le prisme de sel gemme est installé, une fois pour toutes, au minimum de déviation. On note l'indication des microscopes, puis on donne chaque fois au grand prisme de verre, placé sur le spectromètre, une position telle que l'image du fil *d* (fig. 11) tombe sur l'échelle *S'* aussi près que possible de 40° 58′ 53′, c'est-à-dire, de l'angle de déviation pour la raie du sodium (voir p. 331). Les microscopes indiqueront alors, en général, une position différente; mais il est à présumer que, durant une même série d'observations, la différence entre l'indication de l'image et celle des microscopes restera constante, et on pourra s'en convaincre aussi souvent qu'on voudra se servir des microscopes pour contrôler les lectures de l'échelle *S'*. Les variations de la *dispersion* avec la température pouvant être négligées, toutes les observations, faites de cette manière, sont immédiatement réduites à 10° C.

Dans le tableau suivant, on trouve les indices de réfraction et les longueurs d'onde qui, pour le prisme donné, correspondent au plus petit angle de déviation, à la température de 10° C.

Plus petit angle de déviation à 10° C.	Indice de réfraction.	Longueur d'onde.	Plus petit angle de déviation à 10° C.	Indice de réfraction.	Longueur d'onde.
G 42° 32′ 15″	1,56159	0μ,4307	38° 50′	1,5202	4μ,69
F 41 47 36	1,55341	0 ,4860	38 45	1,5193	5 ,14
b 41 29 48	1,55012	0 ,5183	38 40	1,5183	5 ,59
E 41 24 40	1,54918	0 ,5269	38 35	1,5174	6 ,04
D 40 58 53	1,54440	0 ,5889	38 30	1,5164	6 ,49
C 40 39 13	1,54074	0 ,6562	38 25	1,5155	6 ,95
A 40 18 37	1,53692	0 ,7604	38 20	1,5145	7 ,41
40 10	1,5353	0 ,82	38 15	1,5136	7 ,87
40 5	1,5344	0 ,86	38 10	1,5126	8 ,33
40	1,5334	0 ,91	38 5	1,5117	8 ,79
39 55	1,5325	0 ,97	38	1,5107	9 ,26
39 50	1,5315	1 ,04	37 55	1,5098	9 ,73
39 45	1,5306	1 ,12	37 50	1,5088	10 ,20
39 40	1,5297	1 ,22	37 45	1,5078	10 ,67
39 35	1,5287	1, 38	37 40	1,5069	11 ,14
39 30	1,5278	1, 59	37 35	1,5059	11 ,61
39 25	1,5268	1 ,86	37 30	1,5049	12 ,08
39 20	1,5259	2 ,19	37 25	1,5040	12 ,55
39 15	1,5249	2 ,56	37 20	1,5030	13 ,02
39 10	1,5240	2 ,96	37 15	1,5020	13 ,49
39 5	1,5230	3 ,38	37 10	1,5010	13 ,96
39	1,5221	3 ,81	37 5	1,5001	14 ,43
38 55	1,5212	4 ,25	37	1,4991	14 ,90

Les valeurs de λ ont été interpolées entre les nombres que M. Langley a déterminés expérimentalement jusqu'à 5″,3; au-delà de ce point, elles ont été continuées dans l'hypothèse que la courbe de dispersion approche d'une ligne droite. Mais, pour l'interpolation, on a admis en outre que cette courbe possède un cours régulier à travers les observations de M. Langley, ce qui a pour conséquence que, par exemple, le rayon dont la longueur d'onde est égale à $5 \times \lambda D$, avec l'indice 1,5243, s'en écarte d'une quantité qui depasse l'erreur

probable indiquée pour ce rayon. Aussi longtemps, toutefois, qu'on ne connaît pas d'une manière certaine un plus grand nombre de points de la courbe, il m'a paru convenable de lui donner la forme la plus simple possible, bien que celle-ci, très probablement, ne soit pas conforme à la réalité. La forme en question est représentée dans la fig. 1, Pl. XIII. Pour abscisses on a pris les angles de déviation; la longueur d'onde est, en chaque point du spectre prismatique, d'autant de microns que l'indiquent les ordonnées de la courbe, exprimées en centimètres.

Dans toutes les expériences qui seront rapportées plus loin, la fente avait une largeur d'environ 0mm,3, par conséquent égale à celle de la bandelette bolométrique. La fente et le bolomètre étaient placés, l'un et l'autre, à 286mm de distance de la lentille correspondante, parce que telle était la distance focale pour les rayons qui, d'après des expériences préliminaires, se trouvaient à peu près au milieu de l'étendue des spectres observés. Une demi-heure avant le commencement des observations le courant devait être porté à l'intensité convenable, afin que les échanges calorifiques nécessaires pussent avoir lieu avant l'introduction du galvanomètre dans le circuit.

Lors de cette introduction, on ajoute toujours au galvanomètre un circuit de dérivation, d'abord celui de $\frac{1}{1000}$ de sa résistance intérieure, puis celui de $\frac{1}{100}$, enfin celui de $\frac{1}{10}$, et chaque fois l'indication est amenée, par le déplacement de la cuvette à mercure k', aussi près que possible de la position d'équilibre. Le juste rapport des résistances compensatrices une fois trouvé, on peut ordinairement, au début d'une nouvelle série d'expériences, se contenter d'introduire la dérivation $\frac{1}{10}$, parce que la variation de température est rarement assez grande pour que $\frac{1}{10}$ du courant du pont fasse sortir du champ visuel l'image de l'échelle.

Enfin, le dernier „*shunt*" est enlevé, et on examine si l'aiguille reste en repos lorsque la dernière correction a

été faite à l'aide du curseur S_1. Si tel est le cas, les observations peuvent commencer; mais, très souvent, on est désappointé et il se passe encore un temps notable avant que toutes les températures soient équilibrées et tous les courants d'air perturbateurs arrêtés. Même le passage de voitures et de bateaux occasionne souvent de fâcheuses interruptions, et une forte variabilité du magnétisme terrestre rend parfois le travail impossible. Toutes ces circonstances sont cause qu'il en coûte beaucoup de temps pour obtenir des résultats méritant confiance, et comme chaque série d'expériences en elle-même, abstraction faite des influences perturbatrices, est déjà d'assez longue durée, il ne m'a pas encore été donné de réunir un grand nombre d'observations. Je n'ai donc pas atteint le degré d'exactitude auquel la méthode employée pourrait conduire si, en multipliant les expériences, on éliminait les erreurs accidentelles; mais, là où une même série expérimentale fut répétée quelques fois, les résultats s'écartaient si peu les uns des autres, qu'aucun doute ne saurait subsister quant à leur caractère général.

Lorsque le galvanomètre reste suffisamment tranquille, on peut donner accès à la radiation de la source calorifique, en tirant l'écran d'eau vers le côté. Il est clair que la température possédée à ce moment par la bandelette bolométrique ne fait rien à l'affaire; la déviation dépendra uniquement du changement d'état qu'on provoque, et celui-ci consiste seulement en ce que la fente, précédemment masquée par l'écran noirci de ce côté, qui, étant à la température de la chambre, envoyait sa radiation au bolomètre, livre maintenant passage aux rayons qui émanent de la source calorifique placée en arrière. Cette remarque très simple n'est pas superflue, vu qu'elle nous permet d'étendre le champ des recherches, et que M. Langley, évidemment, n'a pas présenté les choses d'une manière tout à fait exacte. Il considère, en effet, sa 5e classe de corps radiants comme formant un cas particulier [1]),

[1]) *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], IX, p. 446 et 447.

parce que c'est alors la bandelette bolométrique elle-même, à — 2° C, qui envoie des rayons à un écran à — 20° C.; mais il oublie que ce rayonnement du bolomètre lui-même a lieu aussi dans tous les autres cas, et que les caractères spéciaux de la bandelette, en ce qui concerne son pouvoir absorbant et émissif, exercent toujours leur influence sur la forme de la courbe calorifique obtenue, quelle que soit la température ou la nature du corps placé devant la fente.

M. Langley pense, en outre, que si l'on ne veut pas choisir pour corps radiant la bandelette bolométrique, il est nécessaire de porter le bolomètre à une température inférieure à celle de la source de chaleur. Mais cette nécessité n'existe nullement. L'action qu'on observe n'est que l'effet de l'inégalité de la radiation qui passe par la fente en deux cas différents, savoir, lorsque c'est ou bien l'écran, ou bien la source de chaleur, qui se trouve devant la fente. De cette différence de chaleur la bandelette bolométrique absorbera, en chaque point déterminé du spectre, une certaine proportion centésimale, et ces coefficients d'absorption caractérisent la bandelette employée. Ils apparaissent toujours avec leur même valeur, quelle que soit la nature de la source calorifique, car ils sont propres à une bandelette déterminée, pour chaque espèce déterminée de rayons. Lorsqu'on ne connaît pas ces coefficients, il en résulte que la forme absolue des courbes de radiation et même, tant soit peu, la position des maxima restent incertaines; mais les différentes courbes qu'on trouve au moyen d'un même bolomètre n'en sont pas moins parfaitement comparables entre elles.

Supposons maintenant que, en parcourant le spectre, on place chaque fois devant la fente d'abord un écran noirci à — 100° C, par exemple, que la position alors prise par le galvanomètre soit regardée comme position zéro, et qu'ensuite on remplace cet écran par un corps à — 10° C; les écarts ainsi trouvés donneront une représentation du spectre calorifique de cette source à — 10° C, avec le même droit que

d'autres observations sont dites fournir le spectre d'une source à 1000° C, lorsque l'écran à — 100° C est chaque fois remplacé par cette source à 1000° C. La température du bolomètre lui-même et de tout ce qui l'entoure importe peu au résultat. On pourrait dire, seulement, que les différentes observations sont le mieux comparables *alors* que le bolomètre a eu, dans toutes, la même température, car avec la température varie le pouvoir absorbant sélectif de la bandelette bolométrique. On voit que, par suite de la remarque en question, l'étude des spectres des corps, à des températures qui diffèrent peu de la température ambiante, devient, en quelque mesure, plus facilement abordable; je n'ai toutefois pas eu l'occasion de mettre cette méthode en pratique, faute des moyens nécessaires pour atteindre de très basses températures.

---

b. Etude des spectres calorifiques de quelques flammes.

---

1. *La flamme de Bunsen et les flammes de l'hydrogène et de l'oxyde de carbone.*

A l'état gazeux, la matière présente beaucoup de ses propriétés sous leur forme la plus simple; il est donc à présumer aussi que, dans cet état, les molécules seront le moins troublées dans l'exécution de leurs mouvements caractéristiques.

Cette considération m'a engagé à examiner les spectres d'émission de quelques gaz, et, comme premier exemple, j'étais tout naturellement conduit à prendre la flamme d'un brûleur de Bunsen.

Le spectre de cette flamme montre très distinctement deux maxima: l'un à 39° 13′, l'autre, environ trois fois plus élevé, à 38° 51′ 15″.

Comme il y a aussi, dans cette flamme, deux produits de combustion, l'acide carbonique et l'eau, la question se posait

de savoir si chacun de ceux-ci donnait son maximum particulier; le moyen le plus simple de s'en assurer était évidemment d'étudier la flamme de l'oxyde de carbone, qui ne fournit que du dioxyde carbonique, et la flamme de l'hydrogène, qui ne donne que de l'eau.

Dans le tableau suivant sont mis en regard quelques-uns des écarts galvanométriques trouvés dans ces trois spectres.

Déviation minima des rayons.	Ecart du galvanomètre pour			Déviation minima des rayons.	Ecart du galvanomètre pour		
	flamme de Bunsen.	flamme de l'oxyde carbonique.	flamme de l'hydrogène.		flamme de Bunsen.	flamme de l'oxyde carbonique.	flamme de l'hydrogène.
39° 40′	2		1	38° 57′ 30″	41	25	
39° 30′	6½		4	38° 55′	87	57	4
39° 25′	11		12	38° 52′ 30″	130	81	
39° 20′	23		23	38° 51′ 15″	144	82	
39° 15′	47	3	45	38° 50′	129	76	2
39° 12′ 30″	51	5	48	38° 45′	52	10	5
39° 10′	42	4	43	38° 35′	15	2	8
39° 5′	22	2	20	38° 20′	4		3½
39°	15	9	8	37° 40′	4		3

La plupart de ces chiffres sont déduits de deux ou trois observations, quelques-uns, d'un plus grand nombre [1]).

1) Il eût été sans intérêt de mentionner séparément toutes ces observations, vu qu'elles avaient souvent un poids très différent et que ce n'étaient donc pas toujours les valeurs moyennes qui étaient notées comme les plus probables. Lorsque la position zéro du galvanomètre restait très stable, deux observations consécutives en un même point du spectre ne présentaient presque jamais de différence appréciable, de sorte qu'une troisième observation était jugée superflue. Quand, au contraire, par suite de changements de température, la position zéro éprouvait un déplacement régulier, ou quand des bateaux à vapeur, des voitures, des variations du magné-

Le galvanomètre est sensiblement apériodique, mais, en cas de rayonnement, il a besoin de 30 à 40 secondes pour prendre sa nouvelle position, et d'un temps à peu près égal pour revenir à la position zéro. L'écart est toujours compté à partir du milieu entre les positions zéro occupées avant et après l'admission des rayons, et l'observation n'est acceptée que si la position zéro a affecté une marche régulière. Chaque observation demande donc, lorsque aucune perburbation n'intervient, 1$^{\text{min.}}$ 30$^{\text{sec.}}$; et comme le spectre entier était ordinairement parcouru par étapes de 5′ d'arc, tandis qu'au voisinage des maxima il fallait encore exécuter des observations intermédiaires, chaque série expérimentale coûtait non seulement beaucoup de temps, mais surtout beaucoup de gaz; aussi, avec l'hydrogène et l'oxyde de carbone était-il très difficile de faire, en moyenne, plus de deux ou trois observations en un même point du spectre.

La fig. 1, Pl. XIII, donne la représentation graphique des résultats contenus dans le tableau ci-dessus; pour le dessin, toutefois, on a utilisé aussi des mesures intermédiaires, qui ne figurent pas au tableau. On n'a pas fait passer les courbes, en vue d'obtenir une forme plus régulière, *entre* les points déterminés expérimentalement, mais tous les nombres donnés se trouvent *sur* les courbes.

Le résultat, évidemment, s'accorde très bien avec les présomptions. Tandis que le spectre de la flamme de Bunsen présente deux fortes élévations, les spectres de la flamme de l'oxyde de carbone et de la flamme de l'hydrogène ne possèdent chacun qu'un seul maximum important. Celui de la flamme de l'oxyde de carbone coïncide avec le *second* maximum de la flamme de Bunsen, celui de la flamme de l'hydrogène

tisme terrestre, etc., occasionnaient des perturbations irrégulières, le poids de l'observation ne pouvait guère être apprécié qu'au moment même, et on en tenait immédiatement compte à l'effet de décider si de nouvelles observations étaient nécessaires pour donner au nombre cherché le degré voulu de certitude.

avec le *premier*, et l'on voit donc que la formation de l'eau détermine surtout l'émission de rayons dont l'angle de déviation minima dans le prisme employé s'élève à environ 39° 13′, tandis que les ondulations excitées lors de la production de l'acide carbonique sont principalement celles dont l'angle de déviation minima est à peu près = 38° 51′ 20″. Il est à remarquer que dans l'un des deux cas l'acide carbonique provenait de la combustion d'hydrocarbures, dans l'autre de la combustion d'oxyde de carbone ; sur la radiation calorifique émise, cette différence ne paraît pas avoir d'influence sensible.

Là où les courbes sont très inclinées, il va sans dire qu'une erreur de quelques secondes dans la mise au point peut entraîner une assez grande différence dans l'effet calorifique. Par de pareilles erreurs, et par la circonstance que toutes les précautions possibles n'avaient pas encore été prises pour maintenir les flammes constantes, s'expliquent suffisamment certaines anomalies, par exemple, l'entrelacement des courbes de l'eau. Je dois faire remarquer, en outre, que dans ces expériences, contrairement à ce qui eut lieu pour toutes les suivantes, le bolomètre et la fente n'étaient pas encore placés à la distance focale relative aux rayons obscurs moyens, de sorte que la bandelette bolométrique recevait, non pas des images nettes de la fente, mais de petits plans de dispersion. Il devait en résulter une trop faible inclinaison dans les courbes trouvées ; en raison, toutefois, de leur forme à peu près symétrique, le défaut en question ne pouvait avoir beaucoup d'influence sur le lieu du maximum. C'est ce dont on aura, plus loin, l'occasion de se convaincre.

La chaleur que dans le spectre de la flamme de Bunsen on observe au-delà du maximum de l'acide carbonique, et qui se fait sentir avec de petits relèvements et abaissements jusqu'en des régions où la déviation est moindre que 37°, et par conséquent l'indice de réfraction moindre que 1,5, cette chaleur, dis-je, paraît être due à la combustion de

l'hydrogène; en effet, la flamme de l'hydrogène présente les mêmes phénomènes, tandis que, dans le spectre de la flamme de l'oxyde de carbone, ni les expériences actuelles, ni d'autres postérieures ne m'ont permis de constater l'existence de rayons calorifiques dont l'indice de réfraction fût notablement au-dessous de 1,514.

---

2. *La flamme éclairante ordinaire du gaz.*

Une petite flamme éclairante de gaz, de forme pointue, présente le spectre suivant.

Déviation minima des rayons.	Ecart du galvanomètre.	Déviation minima des rayons.	Ecart du galvanomètre.	Déviation minima des rayons.	Ecart du galvanomètre.
41°	1	39° 20′	209	38° 50′	170
40° 40′	2½	39° 15′	180	38° 45′	53
40° 20′	9	39° 10′	141	38° 40′	26
40°	28	39° 5′	77	38° 30′	15
39° 50′	58	39°	49	38° 20′	8
39° 40′	109	38° 57′30″	62	38° 10′	9
39° 30′	197	38° 55′	110	38°	7
39° 25′	214	38° 52′30″	175	37° 50′	7
39° 22′30″	222	38° 51′15″	185	37° 30′	4½

En considérant que vers 40° 18′ se trouvent les rayons visibles extrêmes, on reconnaît immédiatement, par les nombres de ce tableau, combien est peu importante la connaissance du spectre lumineux, comparée à celle de la radiation infra-rouge, lorsqu'il s'agit de se former quelque idée de la nature des mouvements qui déterminent le caractère essentiel d'une flamme.

On voit qu'à 38° 51′ 20″ apparaît de nouveau une élévation très prononcée, qui, d'après les expériences précédentes, peut être rattachée à la formation de l'acide carbonique; mais le maximum relatif à l'eau, formée en même temps, est beaucoup

moins distinct. Néanmoins, on peut encore le reconnaître très bien à l'inspection de la courbe figurative de la Pl. XIII, fig. 1 *d*. Entre 39°5′ et 39° 20′, en effet, le tracé se recourbe assez fortement en dehors; or c'est là précisément la place où doit se trouver le maximum de la radiation de l'eau.

La radiation calorifique principale, toutefois, émane des particules de carbone portées à l'incandescence. En admettant que la ligne pointillée *cc′*, à cours régulier, donne une représentation de la chaleur émise par ces particules de carbone (et d'autres expériences ont appris que la courbe de radiation des corps solides a une pareille forme), on voit distinctement s'élever au-dessus de cette ligne les deux maxima appartenant à l'eau et à l'acide carbonique. La courbe trouvée montre même un accroissement plus rapide des ordonnées à 39° 25′, juste au point où la courbe de radiation des particules charbonneuses incandescentes a très probablement son maximum et marche donc parallèlement à l'axe des abscisses. Or, en ce point, les ordonnées de la courbe de l'eau prennent réellement un accroissement plus rapide.

Il paraît donc que dans le spectre calorifique d'une flamme on peut reconnaître, à la forme de la courbe de radiation, tant les produits de la combustion que les particules incandescentes de la flamme.

3. *Les flammes du sulfure de carbone, de la vapeur de soufre et de l'hydrogène sulfuré.*

Devant la fente je plaçai maintenant une petite lampe à sulfure de carbone, à peu près disposée comme les petites lampes à alcool ordinaires, mais dont la mèche passait par un tube plus long, pour empêcher que le sulfure de carbone, si volatil, ne prît feu à l'intérieur du réservoir. Je m'attendais à trouver deux maxima: l'un à 38° 51′ 20″, appartenant à l'acide carbonique, et un autre qui devait faire connaître la nature de la radiation émise lors de la formation de l'acide sulfureux. Le résultat ne répondit pas entièrement à cette

attente, car je trouvai *quatre* maxima. Pour démêler la signification de ces saillies, j'ai répété l'expérience une couple de fois, dans des conditions différentes. Le tableau suivant donne quelques-uns des nombres trouvées.

Déviation minima des rayons.	Flamme du sulfure de carbone. I.	II.	III.	Déviation minima des rayons.	Flamme du sulfure de de carbone. I.	II.	III.
39° 20′	3	2		38° 30′	$3\frac{1}{2}$	2	
39° 15′	10	7		38° 20′	3	2	
39° 10′	9	6		38° 10′	40	15	
39° 5′	6	4		38° 7′ 30″	43	$16\frac{1}{2}$	5
39°	17	13		38° 5′	32	12	
38° 55′	84	77		38°	21	13	
38° 52′ 30″	128			37° 55′	30	19	
38° 51′ 15″	136	100	58	37° 50′	31	21	18
38° 50′	120	88		37° 45′	25	$17\frac{1}{2}$	
38° 45′	41	33		37° 40′	16	12	
38° 40′	19	12		37° 20′	2	2	

Les déviations inscrites dans la colonne I ont été obtenues par l'emploi d'une mèche ordinaire, en coton. A la combustion de l'hydrogène de cette mèche je crus devoir attribuer le premier maximum, parce qu'il tombait entre 39° 15′ et 39°10′, c'est-à-dire environ à la place où se trouve le maximum de l'eau. En conséquence, pour une seconde série d'observations, la mèche de coton fut remplacée par une mèche d'asbeste; la flamme était alors plus petite; toutes les ordonnées de la courbe de la chaleur devinrent plus courtes, comme il ressort de la colonne II du tableau, mais le maximum entre 39° 15′ et 39° 10′ persista. Selon toute probabilité, il y a donc en cet endroit encore un autre maximum de radiation, qui n'a rien à faire avec la formation de l'eau et dont la signification reste provisoirement obscure. Il n'appartient pas à l'acide sulfureux, comme on le verra tout à l'heure.

Le maximum de l'acide carbonique apparaît très distincte-

ment, et exactement à la place où on devait l'attendre d'après les expériences antérieures.

Des deux autres maxima, celui qui se trouve vers 38°8′20″ est, dans la colonne I, plus grand que le dernier, situé vers 37° 52′, tandis que dans la colonne II c'est ce dernier maximum qui est le plus grand des deux.

Dans la fig. 2 *a* et *b* (Pl. XIII) on peut se convaincre que les places occupées par chacun des deux maxima sur les deux courbes se correspondent parfaitement. La colonne III donne les valeurs des maxima qu'on obtint en brûlant du sulfure de carbone qui tenait en dissolution du soufre. La flamme était alors très petite, probablement parce qu'à la partie supérieure de la mèche des particules de soufre s'étaient déposées entre les fils, mais le dernier maximum avait pris un fort accroissement par rapport à l'avant-dernier. Il semble donc que le dernier maximum soit propre à l'acide sulfureux, tandis que, pour l'élévation à 38° 8′ 20″, la supposition la plus simple était de l'attribuer au sulfure de carbone chaud du noyau de la flamme; dans la première expérience, en effet, la flamme était grande et sa partie moyenne se trouvait devant la fente, de sorte que le sulfure de carbone s'élevant au centre pouvait lancer ses rayons calorifiques à travers la fente, conjointement avec ceux qui émanaient des produits de la combustion opérée dans le bord de la flamme. Dans la seconde expérience, la partie supérieure de la flamme se trouvait devant l'ouverture, et il y avait donc lieu de croire à la présence de moins de sulfure de carbone non brûlé; dans le troisième cas, enfin, la vaporisation se faisait beaucoup plus lentement, et par suite la combustion pouvait être déjà complète à très peu de distance de la mèche. Mais cette interprétation avait besoin, évidemment, d'être contrôlée par d'autres expériences.

En ce qui concerne la radiation émise pendant la formation de l'acide sulfureux, on peut espérer l'obtenir séparément lors de la combustion du soufre, tandis que dans le spectre

de la flamme de l'hydrogène sulfuré elle apparaîtra probablement en combinaison avec la courbe de radiation de l'eau.

Quand, toutefois, on allume un morceau de soufre, il brûle à la vérité avec flamme, mais cette flamme est si basse et si inconstante qu'on peut difficilement en former un spectre calorifique. Après maintes tentatives infructueuses pour obtenir une flamme d'une couple de centimètres de haut au moyen de brûleurs de formes particulières ou en y soufflant de l'air ou de l'oxygène, je résolus enfin de faire bouillir le soufre et d'allumer la vapeur. A cet effet, une éprouvette assez large fut remplie plus d'à moitié de petits fragments de soufre, puis étirée en pointe, de façon que l'ouverture eût un diamètre de moins de 1^{mm}. Le soufre étant alors porté à l'ébullition, la vapeur s'échappait avec violence par l'étroit orifice et, dans la plupart des cas, s'allumait immédiatement d'elle-même, en donnant une flamme de belle dimension. Comme, de cette manière, le contenu d'une éprouvette est vite épuisé, et qu'il y aurait eu de l'inconvénient à brûler dans la chambre des quantités de soufre notablement plus grandes, un aide était chargé, à chaque observation, de porter le soufre un instant à l'ébullition au moyen d'une flamme de Bunsen, qu'on se hâtait d'éloigner dès que l'écran était replacé devant la fente. Ce mode d'expérimentation ne saurait prétendre à l'exactitude, car il était impossible de faire que le soufre se volatilisât toujours dans la même mesure, et la flamme avait donc des dimensions très variables. La place du maximum, toutefois, n'en peut être affectée que très peu. Comme valeurs les plus probables j'ai déduit de trois observations, en chacun des points du spectre ci-dessous indiqués, les écarts correspondants, tandis qu'en aucun autre point, sur toute l'étendue du spectre, la moindre trace de chaleur n'a été constatée:

38° 10′	0	35° 50′	16
38° 5′	1	37° 45′	10
38°	3	37° 40′	4
37° 55′	16	37° 35′	0

La courbe qui représente graphiquement (fig. 3) la distribution de la chaleur résultant de ces nombres s'éloigne plus de la forme symétrique que l'une de celles trouvées précédemment, ce qui est sans doute l'effet de l'irrégularité de la flamme. Mais on n'en peut pas moins conclure de ces observations, en toute sécurité, que l'acide sulfureux a donné naissance au dernier maximum de la flamme du sulfure de carbone.

Par surcroît, j'ai encore examiné une flamme d'hydrogène sulfuré: elle accusait très nettement le maximum de l'eau et une élévation entre 38° et 37° 40′.

Il est plus difficile de trancher la question concernant l'origine de l'élévation qui correspond à 38° 8′ 20″. La hauteur relative différente avec laquelle cette élévation apparaît dans des parties différentes de la flamme, fait présumer, comme il a été dit, qu'elle appartient à une matière qui se trouve dans le noyau, où, à cause de l'insuffisance d'oxygène, la combustion ne saurait être complète. Certaines objections, toutefois, se présentent contre l'idée que cette action calorifique parfois très importante émanerait de la vapeur *chauffée* du sulfure de carbone; car, s'il en était ainsi, on pourrait avec le même droit s'attendre, par exemple, à trouver bien distinctement, dans le spectre de toute flamme qui brûle à l'air, la courbe de radiation de l'azote, puisque ce gaz existe partout en abondance; ou encore, en opérant sur la flamme du gaz d'éclairage, on devrait pouvoir reconnaître facilement les carbures hydriques, qui, dans la partie centrale, s'élèvent également sans éprouver de combustion.

Causant de ces expériences avec M. le Dr. J. D. van der Plaats, celui-ci rappela à mon souvenir le composé COS, l'oxysulfure de carbone. Pour plus d'une raison, il me parut probable que dans la formation de ce corps devait résider la cause de l'apparition de l'avant-dernier maximum dans le spectre de la flamme du sulfure de carbone. COS, en effet, peut très bien être un produit de la combustion de CS_2 en cas d'accès imparfait de l'oxygène, et de cette manière aucune infraction

ne serait faite à la règle, généralement vérifiée jusqu'ici, que les gaz n'émettent qu'*au moment de leur formation* une quantité notable de rayons calorifiques. Mais, dans les maxima de radiation déjà connus, il y a à reconnaître encore une autre régularité, à savoir, que la longueur d'onde de la partie essentielle des rayons émis croît à mesure qu'augmente le poids moléculaire du corps radiant. Bien que le nombre des exemples où une pareille relation s'observe soit encore beaucoup trop faible pour qu'on puisse la poser en règle, l'existence en est pourtant parfaitement admissible pour l'esprit. Or, le poids moléculaire de COS est moindre que celui de SO_2, tandis que le poids moléculaire de CS_2 est, au contraire, plus grand; il y a donc lieu de présumer que des rayons, dont la longueur d'onde est inférieure à celle des rayons émis par SO_2, sont dus au mouvement vibratoire de COS, plutôt que de les supposer originaires des particules, plus lourdes, du sulfure de carbone.

Il s'agissait maintenant de décider si réellement, dans la flamme du sulfure de carbone, il se forme, comme produit intermédiaire, de l'oxysulfure de carbone.

Quand on essaie, au moyen d'un aspirateur, de recueillir les gaz du noyau de cette flamme, on s'aperçoit immédiatement qu'ils emportent avec eux une quantité considérable de soufre libre, dont une partie se dépose à l'intérieur des tubes d'abduction, tandis que le reste se répand, sous forme de nuage épais, dans l'aspirateur. Pour obtenir séparément les produits gazeux, j'intercalai donc, entre le petit tube métallique terminé au centre de la flamme et l'aspirateur, un large tube de verre rempli de ouate, où tout le soufre était alors retenu. L'aspirateur consistait en un flacon d'une couple de litres de capacité, au bas duquel l'eau pouvait s'écouler lentement, tandis qu'à travers le bouchon passait, outre le tube aspiratoire, un tube descendant jusqu'au fond, par lequel on pouvait réintroduire de l'eau dans le flacon, lorsqu'il s'agissait d'en chasser le gaz recueilli.

Le mélange gazeux, ainsi aspiré de la flamme du sulfure de carbone, doit contenir, comme élément principal, de l'azote ; probablement, il n'y a guère plus d'un cinquième qui consiste en produits de combustion, et encore ceux-ci sont-ils en majeure partie formés d'acide carbonique et d'acide sulfureux, de sorte que l'oxysulfure de carbone, s'il existe dans le mélange, ne peut en tout cas s'y trouver qu'en faible quantité. Il peut s'y rencontrer, en outre, du sulfure de carbone échappé à la combustion, et peut-être de l'oxyde de carbone et des traces d'hydrogène sulfuré.

L'oxysulfure de carbone est difficile à distinguer, par ses propriétés, du mélange des éléments étrangers dont il vient d'être question : on ne connaît, pour ce gaz, aucune réaction nette dont le résultat ne puisse tout aussi bien être attribué à l'une des impuretés. Il fallait donc éloigner ces dernières, et pour cela je suivis, d'après le conseil et avec l'aide bienveillante de M. le professeur H. C. Dibbits, la méthode indiquée par M. P. Klason [1]).

On fit d'abord traverser au gaz une forte solution de potasse (1 partie d'hydrate de potasse et 2 parties d'eau), par laquelle furent absorbés CO_2, SO_2 et H_2S; ensuite on le fit passer par un tube en U contenant de la triéthylphosphine, corps qui possède la propriété de retenir CS_2 ; enfin, par l'acide sulfurique pur et concentré, lequel absorbe la vapeur de la triéthylphosphine, vénéneuse et d'une odeur extrêmement désagréable. Ainsi purifié, le mélange gazeux ne peut plus être formé que d'azote, d'oxysulfure de carbone et d'oxyde de carbone.

A ce mélange furent maintenant appliquées les deux réactions caractéristiques de COS recommandées par M. Klason. La première consiste à faire passer lentement le gaz par une solution limpide d'acétate de plomb. Au bout de quelques minutes, un enduit brun foncé devint visible à l'embouchure

[1]) *Journal für prakt. Chemie,* neue Folge, XXXVI, p. 64—74.

du petit tube; bientôt après, le liquide se troubla distinctement, et dans l'espace d'une demi-heure il s'était formé un précipité noir brunâtre, — le tout parfaitement conforme à la description donnée par M. Klason de la réaction caractéristique de l'oxysulfure de carbone. H_2S, dont la présence était douteuse même dans le mélange gazeux primitif, ne peut, après la purification par la potasse, avoir donné lieu au précipité noir. Pour savoir si peut-être des traces de sulfure de carbone en étaient capables, je fis passer pendant longtemps, à travers une solution d'acétate de plomb toute semblable à la précédente, de l'air saturé de vapeurs de sulfure de carbone: pas le moindre trouble ne se manifesta.

Le réactif le plus sensible pour l'oxysulfure de carbone est, suivant M. Klason, l'iodure d'amidon. Une solution très étendue, bleu clair, d'iodure d'amidon est, au bout de quelques minutes, lentement décolorée par COS. Or, notre mélange gazeux produisit exactement le même phénomène. A la vérité, la décoloration a lieu aussi quand SO_2 traverse la solution; mais la possibilité que l'action doive être attribuée essentiellement à ce corps se trouve exclue, si l'on considère que la lessive potassique employée, dans laquelle le gaz montait en petites bulles, était en quantité suffisante pour absorber plus de 3 litres de SO_2.

Les deux réactions ont donc prouvé que dans la flamme du sulfure de carbone il se forme, comme produit intermédiaire, de l'oxysulfure de carbone: fait qui a été dévoilé par l'étude du spectre calorifique de la flamme.

---

4. *Hydrogène, brûlant en présence du chlore et de la vapeur de brome.*

Lorsqu'on laisse s'écouler de l'hydrogène par le tube extérieur d'un bec en verre à gaz oxy-hydrique, qu'on allume cet hydrogène, et qu'ensuite par le tube intérieur on fait

arriver du chlore au lieu d'oxygène, la flamme change manifestement d'aspect. A la place de la flamme large et presque incolore de l'hydrogène, apparaît une flamme plus étroite, pointue, blanc bleuâtre, dans laquelle il se forme de l'acide chlorhydrique. Dans le spectre calorifique de cette flamme je m'attendais naturellement à trouver de nouveau deux maxima : celui, déjà connu, de l'eau et celui de l'acide chlorhydrique. Lors des premières expériences, toutefois, il me fut impossible de découvrir autre chose que le spectre de la flamme ordinaire de l'hydrogène. En conséquence, je résolus de déterminer la forme de la courbe de radiation avec toute l'exactitude possible, et à cet effet, en répétant l'expérience, j'observai les précautions suivantes.

En premier lieu, le chlore fut amené par le tube extérieur, l'hydrogène par le tube intérieur, de sorte que ce dernier gaz, à sa sortie, était de toutes parts enveloppé par de l'air chargé de chlore. La provision d'hydrogène, plus de 40 litres, se trouvait dans un grand sac à gaz rempli seulement à demi, où la pression pouvait être maintenue assez constante au moyen d'un poids superposé. Le chlore était recueilli dans un flacon de verre, d'environ 25 litres de capacité ; par le bouchon passaient, hermétiquement adaptés, deux tubes, dont l'un était passablement large et descendait jusqu'au fond, tandis que l'autre avait son embouchure tout au haut du flacon. Ce dernier tube servait à l'abduction du gaz et était donc relié au bec. Pour obtenir un écoulement régulier, je faisais arriver dans le flacon, avec une vitesse constante mais réglable à volonté, une solution saturée de sel marin, introduite par le large tube, surmonté d'un entonnoir. La solution de sel marin avait été choisie parce qu'elle absorbe beaucoup moins de chlore que l'eau pure ; en outre, la solution employée était déjà presque saturée de chlore, comme ayant servi à recueillir ce gaz lors de la préparation. Le réservoir de cette eau salée avait une capacité d'au moins 30 litres et était disposé en flacon de Mariotte, pour assurer

la constance de la pression. De plus, le tube d'écoulement était muni de deux robinets placés à la suite l'un de l'autre de sorte que, lorsque l'un des deux était entièrement ouvert, on pouvait avec l'autre régler la vitesse du courant. Laissant alors ce second robinet dans la position voulue, on était à tout moment maître, au moyen du premier, de faire cesser l'écoulement, ou de le faire recommencer avec cette vitesse déterminée.

Un pareil tube à deux robinets était également placé entre le bec et le sac à hydrogène, et les quatre robinets se trouvaient à ma portée quand j'étais assis devant les lunettes. Au-dessus du bec il y avait deux électrodes en platine, entre lesquelles, à l'aide d'un petit appareil d'induction, je pouvais faire jaillir une étincelle, pour allumer chaque fois la flamme; il m'était impossible, en effet, de prendre l'hydrogène et le chlore en quantités disponibles tellement grandes qu'une flamme chlorhydrique pût être entretenue pendant plusieurs heures consécutives, et il fallait donc avoir soin de ne pas laisser brûler la flamme plus longtemps que cela n'était absolument nécessaire pour chaque observation. Je commençais par placer les robinets régulateurs de façon à former devant la fente une flamme chlorhydrique de dimension convenable, environ 3 cm de longueur, après quoi je déterminais pas à pas la radiation, fermant après chaque observation l'accès au gaz, pour ne pas en perdre inutilement. De cette manière, les mesures purent être répétées une couple de fois, et on put déterminer en outre, comme terme de comparaison, le spectre de la flamme fournie par un courant d'hydrogène parfaitement semblable, mais sans apport de chlore. Voici, placés en regard les uns des autres, les écarts trouvés dans les deux spectres:

Déviation minima des rayons.	Flamme d'hydrogène avec apport de chlore.	Flamme d'hydrogène sans apport de chlore.	Déviation minima des rayons.	Flamme d'hydrogène avec apport de chlore.	Flamme d'hydrogène sans apport de chlore.
39° 30′	4	4½	39° 7′ 30″	25	20
39° 25′	7	8½	39° 5′	18	13
39° 20′	17	19	39° 2′ 30″	13	8½
39° 15′	31	38	39°	11	5½
39° 12′ 30″	33½	48	38° 55′	7	4
39° 10′	29	32½	38° 50′	5	3

Le maximum de la chaleur émise est situé pour les deux flammes à peu près au même endroit, tout au plus, pour la flamme dans laquelle il se forme de l'acide chlorhydrique, une demi-minute plus loin du spectre visible que pour la flamme ordinaire de l'hydrogène; mais, tandis que depuis 39° 30′ jusqu'au-delà de 39° 10′ la radiation de cette dernière est la plus forte, dans la partie suivante du spectre c'est la flamme chlorhydrique qui produit l'effet thermique le plus marqué. Un coup d'œil sur la fig. 4 montre immédiatement que, dans cette dernière flamme, une grande partie de l'hydrogène a encore brûlé en formant de l'eau, mais le reste s'est uni au chlore, avec émission de rayons calorifiques, dont le maximum paraît se trouver en quelque point voisin de 39°. La détermination précise de ce maximum ne serait guère praticable par la méthode suivie; mais, en supposant que la ligne pointillée de la figure représente la chaleur émise par l'eau qui s'est formée, l'aire restant entre cette ligne et la courbe *b* permet de juger plus ou moins de la distribution que la chaleur affecterait dans le spectre chlorhydrique pur.

Remarquons encore, en passant, que dans cette série les inclinaisons de la courbe de l'eau sont plus raides que lors de l'expérience mentionnée précédemment (p. 341); la raison en est que la fente et le bolomètre sont maintenant placés

à la distance focale pour les rayons obscurs moyens, ce qui n'était pas le cas dans les premières expériences [1]).

Le résultat obtenu, concernant la valeur probable de l'angle de déviation des rayons les plus efficaces du gaz chlorhydrique, demandait une confirmation ultérieure. Je voulus, en conséquence, faire brûler l'hydrogène dans une atmosphère formée uniquement de chlore.

Sur un verre de lampe en forme de poire fut taillée, à la partie élargie, une surface plane, de manière qu'il en résultât une ouverture ovale, d'environ $2\frac{1}{2}$ cm de hauteur et $1\frac{1}{2}$ cm de largeur, pouvant être close par une lame polie de sel gemme. En bas, on adapta au verre de lampe un bouchon de liège fermant bien et imbibé de paraffine, par lequel passaient, l'un près de de l'autre, les deux tubes amenant les gaz, ainsi que deux fils de platine, entre lesquels devait jaillir une petite étincelle d'induction au-dessus de l'orifice du tube à hydrogène. Celui-ci était disposé de façon que la flamme se trouvât à peu près au milieu du verre et à la hauteur de la lame de sel gemme. L'autre tube était plus large, afin de pouvoir amener toujours du chlore en excès, et débouchait à très peu de distance au-dessus du fond. En haut également, le verre de lampe était fermé par un bouchon de liège; à celui-ci s'adaptait un tube assez large, qui communiquait, par une ouverture dans le mur, avec l'air extérieur. On pouvait donc maintenir le verre constamment plein de chlore, sans en être incommodé dans la chambre; l'acide chlorhydrique formé et le chlore surabondant s'échappaient immédiatement au dehors. Le chlore n'étant pas complètement exempt d'oxygène et tout l'air atmosphérique contenu dans le verre ne pouvant en être

---

[1]) Quand, toutefois, on compare entre elles les figures 1 *c* et 4 *a* de la Pl. XIII, cette différence d'inclinaison semble plus forte qu'elle ne l'est en réalité; mais aussi, ces deux courbes ne sont pas directement comparables, vu que dans les fig. 1, 2, 7 et 8 les ordonnées n'ont que la moitié du nombre des millimètres des écarts galvanométriques correspondants, tandis que dans les fig. 3, 4, 5 et 6 les écarts sont représentés en grandeur vraie.

chassé promptement, il se formait aussi, chose prévue, de l'eau; celle-ci dissolvait immédiatement l'acide chlorhydrique, et dans les premières expériences la dissolution ruisselait de tous côtés le long de la paroi interne du verre et aussi le long de la lame de sel gemme. Il en résultait que bientôt je ne pouvais presque plus découvrir aucune trace d'action calorifique, parce que la radiation émise par l'acide chlorhydrique semblait être absorbée de préférence par cette dissolution. Pour parer à cet inconvenient, la capacité du verre, tant au-dessus qu'au-dessous de la flamme, fut remplie de petits fragments de chlorure de calcium, et en même temps le courant de chlore fut renforcé. Par ce moyen, plusieurs observations purent être faites avant qu'il se déposât de la dissolution d'acide chlorhydrique contre les parois.

La régulation des robinets avait lieu comme dans l'expérience précédente Voici les résultats obtenus:

Déviation minima des rayons.	Hydrogène brûlant dans le chlore.	Déviation minima des rayons.	Hydrogène brûlant dans le chlore.
39° 20′	1	39°	13
39° 15′	2½	38° 55′	8
39° 10′	7	38° 50′	3
39° 5′	11	38° 45′	1

Le maximum se trouve donc à 39° 1′ 30″. Du côté des petites longueurs d'onde, l'inclinaison de la courbe (fig. 5) est un peu moindre que de l'autre côté; cela peut tenir à la formation d'une petite quantité d'eau, car ni l'hydrogène ni le chlore n'étaient absolument exempts d'air atmosphérique.

Il eût été intéressant, à coup sûr, de connaître aussi les endroits du spectre où sont situés les maxima de radiation

des acides bromhydrique et iodhydrique. De même que dans le chlore, l'hydrogène se laisse enflammer dans une atmosphère de vapeur de brome; mais les mesures qu'il faut prendre pour que cette flamme, durant quelque temps, brûle tranquillement devant le spectromètre, et cela de telle sorte que sa radiation ne soit pas absorbée avant d'atteindre l'instrument, entraînent de grandes difficultés. J'ai essayé d'arriver au but avec le même dispositif qui m'avait servi pour le chlore, et, à cet effet, le plus large des deux tubes qui passaient par le fond du verre de lampe fut relié à un petit réservoir, dans lequel on chauffait du brome. Bientôt, toute la capacité du verre se trouva remplie de la vapeur brun foncé du brome, et on put allumer, au moyen de l'étincelle d'induction, l'hydrogène amené par le second des deux tubes. Mais la vapeur du brome, à la température ordinaire, étant encore loin de posséder la tension de l'air atmosphérique, celui-ci ne fut pas chassé du verre, et une grande partie de l'hydrogène brûla donc en donnant de l'eau, dans laquelle se condensait l'acide bromhydrique. En peu de temps, les parois du verre et la lame de sel gemme furent couvertes de buée, de sorte que la chaleur émise était bientôt absorbée en grande partie. Si l'on tient compte, en outre, de la circonstance que la chaleur de combinaison de l'hydrogène et du brome est beaucoup moindre que celle de l'hydrogène et du chlore, et que, pour cette raison déjà, la radiation émise par la flamme sera difficilement observable, on concevra aisément que, de la manière susdite, aucun résultat satisfaisant ne fut obtenu. Dans cette série d'observations, qui fut poursuivie jusqu'à 37°, je ne pus trouver autre chose que le maximum de l'eau. On obtiendrait le spectre pur de l'acide bromhydrique, si la vapeur de brome était portée à la tension de l'atmosphère; mais, pour cela, tout l'entourage de la flamme devrait être maintenu à une température d'environ 60° C, et je n'ai pas réalisé le dispositif assez compliqué que cette condition rendrait nécessaire.

5. *La flamme du cyanogène et la flamme de l'oxyde de carbone dans l'oxygène.*

Jusqu'ici, nous n'avons rencontré que des maxima de radiation de corps composés: on doit se demander s'il est possible de trouver, de la même manière, des ondulations qui soient engendrées lors de la formation de quelque gaz élémentaire. Nous y parviendrions, peut-être, si un pareil élément pouvait être obtenu, en un certain sens, comme produit de combustion, c'est-à-dire, s'il se formait dans une flamme, avec dégagement de chaleur. Or, d'après ses propriétés, on se figure le gaz cyanogène constitué de telle sorte que les deux groupes CN soient unis l'un à l'autre par leurs atomes de carbone; entre les atomes d'azote il existerait donc, dans ce composé, un lien plus lâche que dans la molécule d'azote, et lors de la combustion du gaz, de l'azote se forme en même temps que de l'acide carbonique. Si la génération du premier de ces deux produits a lieu avec dégagement de chaleur (à cet égard, les ouvrages de thermochimie que j'ai consultés ne m'ont fourni aucun renseignement), on peut s'attendre à trouver dans le spectre de la flamme du cyanogène deux maxima: le maxima de l'acide carbonique et celui de l'azote.

Le gaz fut préparé de la manière ordinaire, au moyen du cyanure de mercure, et recueilli dans une grande vessie de bœuf, qui avait près de 8 litres de capacité, mais qui ne fut pas remplie en entier. Sous une pression passablement constante, exercée par des poids placés sur la vessie, le cyanogène s'écoulait, à travers un tube contenant du chlorure de calcium, vers le brûleur, où on l'allumait chaque fois à l'aide d'une petite flamme de gaz d'éclairage.

Comme moyennes de quatre observations, j'ai trouvé les nombres inscrits dans la seconde colonne du tableau suivant:

Déviation minima des rayons.	Radiation calorifique de la flamme du cyanogène.	Radiation calorifique de la flamme de Bunsen.	Déviation minima des rayons.	Radiation calorifique de la flamme du cyanogène.	Radiation calorifique de la flamme de Bunsen.
39° 20′	1½	22	39° 5′	2½	15½
39° 17′ 30″	2		39°	4½	14
39° 15′	4¾	44	38° 55′	34½	81
39° 12′ 30″	8	52	38° 51′ 15″	101	155
39° 10′	8¼	40	38° 45′	28½	41
39° 7′ 30″	3¾		38° 40′	7	16

On voit ici, outre le maximum connu de l'acide carbonique, une élévation dont le sommet se trouve à un peu plus de 39° 11′, par conséquent, très près du maximum de l'eau. Il ne coïncide pourtant pas avec celui-ci; je m'en suis assuré, immédiatement après avoir achevé cette série d'expériences, en déterminant de nouveau le spectre de la flamme de Bunsen, laquelle fournit de l'acide carbonique et de l'*eau*; les écarts galvanométriques ainsi obtenus sont donnés, comme termes de comparaison, dans la troisième colonne du tableau. Le maximum de l'acide carbonique, dans la colonne II, présente bien (probablement par suite d'une erreur de pointé) un léger déplacement du côté des grandes longueurs d'onde [1]), mais ce déplacement est trop faible pour expliquer la différence de position entre les deux autres maxima.

Y a-t-il lieu, toutefois, d'attribuer réellement à l'azote formé dans la flamme cette courbe de radiation dont le sommet est situé vers 39° 11′? Un coup d'œil retrospectif, sur les résultats

---

[1]) Dans la fig 6 ce déplacement est à peine visible, mais il ressort de la comparaison des nombres qui se trouvent de part et d'autre du maximum dans les deux spectres. Il est extrêmement difficile, toutefois, dans un cas tel que celui-ci, de déterminer exactement la forme des courbes de radiation; les inclinaisons sont ici tellement fortes, qu'une erreur de pointé de ½′ donne lieu, dans l'écart galvanométrique, à une différence de 5 à 10 parties de l'échelle.

trouvés pour les flammes de l'oxyde de carbone et du sulfure de carbone, fait naître quelques doutes à cet égard. Dans les spectres de ces deux flammes, en effet, au même endroit, se trouvait également un petit maximum, dont l'ordonnée la plus longue avait, avec l'ordonnée maxima correspondante de l'acide carbonique, à peu près le même rapport de grandeur que cela est le cas dans le spectre de la flamme du cyanogène. Pour savoir si ces petits maxima antérieurement trouvés (et dont la place n'avait pas été fixée avec précision) étaient peut-être dus à l'influence perturbatrice de la vapeur d'eau incandescente, je soumis encore une fois à l'examen une flamme d'oxyde de carbone bien desséché; le résultat fut qu'à 39° 11′ 30″ apparut distinctement une élévation, comme le montrent les nombres suivants.

Déviation minima des rayons.	Chaleur de la flamme de l'oxyde de carbono.	Déviation minima des rayons	Chaleur de la flamme de l'oxyde de carbone.
39° 15′	9	38° 55′	83
39° 20′ 30″	16	38° 52′ 30″	200
39° 10′	15	38° 51′ 15″	226
39° 7′ 30″	8	38° 50′	217½
39° 5′	5	38° 45′	59
39°	—	38° 40′	11

Immédiatement après, je déterminai de nouveau, en vue de la comparaison, le spectre de la flamme de Bunsen : le premier maximum de celle-ci se trouvait, décidément, d'au moins 1′ 30″ au-delà de celui de l'oxyde de carbone, du côté des petites longueurs d'onde.

Entre le spectre calorifique de la flamme du cyanogène et celui de la flamme de l'oxyde de carbone il n'existe donc aucune différence notable, de sorte que nous perdons le droit d'attribuer le premier maximum du spectre cyanique à l'azote

comme produit de combustion. Pourtant, il ne serait pas tout à fait impossible que l'azote jouât un rôle en cette occasion. Ce gaz, en effet, est toujours présent en abondance dans toute combustion opérée à l'air, et peut-être éprouve-t-il alors un échauffement suffisant pour devenir capable d'émettre lui-même une radiation appréciable. La flamme du cyanogène contient plus d'azote que les flammes de l'oxyde de carbone et du sulfure de carbone : on serait alors tenté d'expliquer par là le fait que dans le spectre de la première de ces flammes le maximum en question est un peu plus grand, par rapport à celui de l'acide carbonique, que dans les deux autres flammes.

Lors de la combustion de l'ammoniaque, il doit aussi y avoir comparativement beaucoup d'azote dans la flamme, et l'étude du spectre de cette flamme pourrait donc servir à vérifier l'hypothèse émise, n'était-ce que la courbe présumée de la radiation de l'azote coïncide à peu près avec la courbe de l'eau, laquelle naturellement apparaîtra en même temps et dont elle ne pourra être séparée.

Si toutefois cette élévation à 39° 11′ 30″ est due uniquement à l'azote incandescent, elle ne pourra pas se produire lorsque, par exemple, l'oxyde de carbone brûlera dans une atmosphère d'oxygène pur.

Pour réaliser ce cas, je disposai de nouveau un verre de lampe en poire avec ouverture latérale pouvant être fermée par une lame de sel gemme, verre tout semblable à celui dont j'avais fait usage pour l'étude du maximum de l'acide chlorhydrique. Au fond de ce verre débouchait un tube qui amenait un courant d'oxygène réglable à volonté, tandis que l'oxyde de carbone ne recevait accès au bec en verre qu'au moment de l'observation. Au-dessus de ce bec se trouvaient de nouveau deux électrodes en platine, entre lesquelles on pouvait faire éclater une étincelle d'induction pour déterminer chaque fois l'inflammation de l'oxyde de carbone. Des expériences préliminaires avaient toutefois appris que, bien desséché, ce gaz n'était pas enflammé par une étincelle d'induction, même

dans une atmosphère d'oxygène pur, mais que la présence d'une quantité extrêmement petite d'hydrogène suffisait pour que le but fût atteint. En conséquence, je fis passer par le fond du verre de lampe encore un troisième petit tube, qui se terminait tout près de l'orifice du brûleur, et par lequel on laissait arriver un peu de gaz d'éclairage au moment où la flamme devait être allumée.

De cette manière, je réussis à exécuter un petit nombre d'observations; mais, par un fatal hasard, il s'était formé dans le verre de lampe, durant quelques instants où la flamme ne brûlait pas, un mélange d'oxygène et d'oxyde de carbone. La première étincelle suivante donna donc lieu à une explosion, qui mit prématurément fin à l'expérience. Les quelques mesures déjà faites sont réunies dans le tableau suivant.

Déviation minima des rayons.	Oxyde de carbone brûlant dans l'oxygène.	Déviation minima des rayons.	Oxyde de carbone brûlant dans l'oxygène.
39° 20′	3	39° 5′	4
39° 15′	8	39°	1
39° 12′ 30″	20	38° 57′ 30″	$6\frac{1}{2}$
39° 10′	14	38° 55′	28

On voit que, pour l'apparition d'un maximum à 39°11′30″, la présence de l'azote n'est pas nécessaire. Quant à savoir si, en cas d'absence de l'azote, l'intensité relative du maximum devient plus grande ou plus petite, c'est ce que les nombres trouvés ne nous apprennent pas, vu que l'endroit du maximum de l'acide carbonique n'était pas encore atteint; on n'a donc pas non plus la preuve que l'azote soit *sans* influence [1]). La question de l'origine de l'élévation dont il s'agit

[1]) MM. Magnus, Tyndal et Röntgen, à la suite de leurs expériences sur l'absorption des radiations calorifiques par les gaz, arrivent unanimement à la conclusion que l'air atmosphérique, et par conséquent aussi l'azote, est à peu près complètement diathermane pour les radiations des sources

reste par conséquent indécise. L'oxyde de carbone ou l'oxygène, qui tous les deux se trouvent dans la flamme, peuvent y avoir donné lieu, mais peut-être aussi le maximum appartient-il à la courbe de radiation de l'acide carbonique, de sorte qu'il indiquerait, dans la molécule de ce gaz, une période secondaire constamment existante.

A mon grand regret, je n'ai pas été dans l'occasion de remonter l'appareil et de répéter l'expérience; pour le moment, l'hypothèse la plus acceptable me paraît être qu'on a affaire ici à la radiation de l'oxyde de carbone, gaz qui selon toute probabilité est incessamment formé, comme produit intermédiaire, dans la flamme, même dans celle de l'oxyde de carbone.

A la description de cette série d'expériences j'ajouterai un mot, pour faire connaître de quelle manière la petite plaque de sel gemme, qui fermait l'ouverture pratiquée dans le verre de lampe, était protégée contre l'action de l'humidité ambiante. Le côté tourné vers l'intérieur était maintenu sec par une petite corbeille de chlorure de calcium suspendue dans le verre de lampe, tandis que le long du côté extérieur montait lentement un courant d'air sec et légèrement chaud. Ce courant était obtenu en chauffant par une flamme de gaz, au-dessous du milieu, un tube de cuivre placé obliquement, long d'environ 80 cm, et dont l'orifice supérieur se trouvait juste au-dessous de la plaque de sel. L'air chauffé dans le tube s'élevait et était remplacé par de l'air frais, qui toutefois, avant de pénétrer dans le tube, était obligé de passer sur du chlorure de calcium. Grâce à cette disposition si simple, le sel gemme resta parfaitement sec et diaphane, bien que, ces jours-là, l'atmosphère fût très humide.

---

calorifiques dont ils ont fait usage. Ce fait plaide en faveur de l'idée que, dans les phénomènes de radiation étudiés par nous, l'azote ne joue *pas* de rôle appréciable. A cause de ce même fait, nous devons regarder comme improbable aussi l'influence directe des molécules d'oxygène.

6. *La flamme de l'hydrogène phosphoré.*

Le phosphore brûle avec une flamme émettant une vive lumière, blanche, qui au simple aspect ne se distingue pas de celle d'une flamme de gaz ordinaire. Pour cette dernière, le pouvoir éclairant est attribué, comme on sait, à des particules de charbon portées à l'incandescence; mais à quoi la flamme du phosphore, dont le produit de combustion $P_2 O_5$ est probablement gazeux à la température qui y règne, doit-elle sa lumière intense? Cette seule question donne déjà de l'intérêt à l'étude du spectre de la flamme du phosphore, car on peut à bon droit s'attendre à ce que la nature de la radiation s'éloigne beaucoup de celle de la flamme du gaz ordinaire, bien que, dans leur partie éclairante, les deux spectres ne diffèrent que peu l'un de l'autre; mais, en outre, cette étude nous offre la chance de trouver le maximum de radiation du composé $P_2 O_5$.

Il est extrêmement difficile, toutefois, de faire brûler le phosphore avec une flamme constante devant la fente du spectromètre; je résolus, en conséquence, d'avoir recours au gaz hydrogène phosphoré, qui, outre l'eau, fournit aussi de l'acide phosphorique comme produit de sa combustion, et cela avec les mêmes phénomènes lumineux.

La manipulation d'une grande quantité d'hydrogène phosphoré exige beaucoup de prudence, vu que le gaz est vénéneux et prend feu très facilement. On doit veiller, en premier lieu, à ce que lors de la préparation il ne se forme pas la combinaison liquide $P_2 H_4$, qui rendrait le gaz spontanément inflammable. A cet effet, on le prépara au moyen du phosphore et d'une dissolution alcoolique de potasse, chauffés au bain de sable. Un grand flacon, d'environ 12 litres de capacité, servit à recueillir le gaz sur l'eau; on eut grand soin de ne laisser se mélanger à celui-ci que le moins d'air possible, afin que plus tard, lors de l'inflammation, la

combustion ne se propageât pas à l'intérieur. Le flacon était disposé de manière à se prêter aussi à l'écoulement du gaz sous pression arbitraire. Pour cela, le bouchon était traversé par un large tube descendant jusqu'au fond et par un tube plus étroit s'arrêtant dans le col; dans le large tube je pouvais laisser arriver de l'eau avec la vitesse voulue, de la façon décrite à propos du réservoir à chlore, p. 353.

Lors de la combustion de l'hydrogène phosphoré, il se dégage en peu de secondes déjà un si épais nuage de $P_2 O_5$, qu'il est absolument nécessaire, lorsque la flamme doit servir pendant quelques heures, d'avoir un moyen efficace de se débarrasser du produit de la combustion. Ce moyen consista à placer au-dessus du pied V (fig. 11), en guise de cheminée, un tuyau de poêle long d'environ 3 m, qui débouchait au dehors et dans lequel un tirage était entretenu à l'aide d'une flamme de gaz.

Le bec était de nouveau formé d'un tube de verre étiré en pointe; mais, après une ou deux observations, la flamme devenait plus petite et bientôt l'ouverture du bec était obstruée par une croûte solide, probablement de $P_2 O_5$. Un instant je craignis que toute l'expérience allait échouer sur cet obstacle; heureusement, je parvins à l'écarter en donnant au bec une forme différente. La partie étirée du bec fut cassée, puis l'extrémité du tube fut recouverte d'une petite douille en cuivre, dont le haut était fermé par une lame plane de platine, percée d'une petite ouverture. De cette manière, dès que l'ouverture se trouvait obstruée, il était facile de la déboucher à l'aide d'une épingle; mais d'elle-même elle restait ouverte, car ce bec en métal, meilleur conducteur que celui en verre, s'échauffait beaucoup moins, et l'acide phosphorique qui s'y déposait pouvait donc absorber de l'eau; aussi était-il fréquemment nécessaire d'enlever la goutte de liquide qui se formait sur le petit obturateur en platine.

La radiation calorifique de la flamme de l'hydrogène phos-

phoré est distribuée sur le spectre, en tant que j'ai examiné celui-ci (voir p. 368), de la manière suivante.

Déviation minima des rayons.	Flamme d'hydrogène phosphoré.	Déviation minima des rayons.	Flamme d'hydrogène phosphoré.	Déviation minima des rayons.	Flamme d'hydrogène phosphoré.
41°	1	39° 40′	3	38° 40′	3
40° 50′	$1\frac{3}{4}$	39° 30′	$4\frac{1}{2}$	38° 30′	2
40° 40′	3	39° 20′	$11\frac{1}{2}$	38° 20′	1
40° 35′	4	39° 15′	26	38° 10′	2
40° 30′	3	39° 12′ 30″	34	38°	6
40° 20′	2	39° 10′	21	37° 55′	8
40° 10′	2	39° 5′	6	37° 50′	4
40°	3	39°	3	37° 40′	2
39° 50′	2	38° 50′	4	37° 30′	0

Ce qui frappe tout d'abord, c'est la quantité extrêmement faible de la chaleur émise, bien qu'on eût employé une flamme assez grande, haute d'environ 3 cm, capable d'éclairer la fente entière. Quand on abstrait l'élévation dont le sommet se trouve vers 39° 13′ et qui est de nouveau attribuable à la combustion de l'hydrogène, il ne reste pas grand'chose pour la chaleur émise par le pentoxyde de phosphore formé. Jusqu'au point du spectre où la déviation est de 37°, il n'y est pas question, en tout cas, de quelque maximum caractérisé,

Comme je croyais avoir des raisons, qui seront expliquées plus loin, de présumer que la radiation principale émanant de P_2O_5 posséderait une longueur d'onde encore beaucoup plus grande que celle qui correspond à la déviation 37°, j'ai examiné le spectre, de 10 en 10′, jusqu'à l'angle de déviation de 25°; mais, sauf une couple d'indications douteuses à 36°15′ et 34°50′, je n'ai pas trouvé trace d'action calorifique.

Il est possible que des rayons de si grande longueur

d'onde soient réellement émis par la flamme, mais qu'ils soient ou bien absorbés par les préparations de sel gemme, ou bien incapables d'échauffer la bandelette bolométrique recouverte de noir de camphre. Pour obtenir à ce sujet une donnée de plus, j'ai comparé, à l'aide d'une pile thermo-électrique ordinaire, les quantités totales de chaleur émises, d'une part par une flamme de gaz d'éclarage, d'autre part par une flamme d'hydrogène phosphoré, la radiation de chacune de ces flammes étant limitée par un même diaphragme à petite ouverture. Le résultat fut que la flamme du gaz communiquait à la pile thermo-électrique environ sept fois autant de chaleur que la flamme de l'hydrogène phosphoré. Le léger affaiblissement d'action, occasionné par une plaque de sel gemme, était à peu près égal pour les deux sources, peut-être de 1 ou $1\frac{1}{2}$ % plus grand pour la flamme de l'hydrogène phosphoré.

L'aire totale de la courbe calorifique déterminée en dernier lieu est beaucoup moindre, toutefois, que le septième de l'aire de la figure qui représente la distribution de la chaleur dans le spectre de la flamme du gaz d'éclairage. Je ne saurais dire avec certitude quelle est la cause de ce phénomène; peut-être tient-elle à une différence entre le pouvoir absorbant de la bandelette bolométrique et celui de la pile thermo-électrique; peut-être aussi existe-t-il encore un maximum de radiation dont la déviation est inférieure à 25°, et dont, par conséquent, la chaleur n'a pas été recueillie par le bolomètre, mais bien par la pile thermo-électrique.

En ce qui concerne le pouvoir éclairant de la flamme de l'hydrogène phosphoré, on voit qu'il est dû à une petite élévation dont le maximum se trouve vers 40°35, par conséquent entre *B* et *C*. Celle-ci et les autres petites élévations indiquées dans le spectre correspondent peut-être à des périodes intra-moléculaires de P_2O_5, ou bien à des vibrations de produits intermédiaires, formés dans la flamme.

---

c. Quelques mots sur la nature de la chaleur émise par les corps solides, et sur le pouvoir absorbant électif de l'eau.

Ce que nous connaissons jusqu'ici de la distribution spectrale de la chaleur émise par les corps solides à différentes températures est dû, en majeure partie, aux recherches de M. Jacques [1]), de M.M. Desains et Curie [2]) et de M. Langley [3]).

M. Jaques crut pouvoir déduire de ses expériences que le maximum d'émission ne se déplace pas sensiblement avec la température; MM. Dessains et Curie et M. Langley, au contraire, trouvèrent un déplacement très distinct, du côté des petites longueurs d'onde, lorsque la chaleur croissait. Ces derniers observateurs avaient opéré sur le cuivre enduit de noir de fumée; M. Jacques avait déterminé la radiation du platine et de quelques oxydes métalliques.

Pour répéter avec mon appareil quelques-unes de ces expériences, je plaçai devant la fente, d'abord, une bandelette de platine, échauffée par un courant galvanique; plus tard, une petite lame de cuivre recouverte d'oxyde de cuivre et chauffée par une flamme de Bunsen, dont la radiation directe ne pouvait atteindre la fente; ensuite, cette même lame, recouverte d'une couche de noir de fumée. Dans le tableau ci-dessous je donne les résultats obtenus avec les deux dernières de ces sources de chaleur, parce qu'elles sont le mieux comparables entre elles. Un petit régulateur de gaz maintenait la flamme autant que possible constante durant chaque série d'expériences, mais aucune mesure n'était prise pour déterminer exactement la température de la lame. Ces expériences ont entièrement la caractère d'une étude provisoire, instituée et communiquée principalement afin de pouvoir comparer quelques résultats, obtenus au

---

1) Jacques, *Proc. of the Amer. Acad.*, 1878—1879.

2) Desains et Curie, *Comptes Rendus*, XC, p. 1506 (1880).

3) Langley, *Ann. de Ch. et de Phys.*, [6] IX, p. 433 (1886).

moyen de mes appareils, avec les résultats analogues trouvés par d'autres observateurs.

Les quatre températures différentes auxquelles eut lieu l'examen de chacun des corps radiants étaient comprises, à l'estime, entre 200° C. et 400° C.

Déviation minima des rayons.	Oxyde de cuivre.				Noir de fumée.			
	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
39° 30′	1	4	7	11				
39° 20′	3½	11	23	35½	1	8	34	55
39° 15′		17	30½	53	4	22	52	90
39° 10′	11	27	38	63	8	37	79	123
39° 5′	14½	31	46	70	12	47½	99	144
39°	14	31	46	68	14	50	104	146
38° 55′		29	42	61	15	51	103	131
38° 50′	14	27	38	49	16	51	95	117
38° 45′			32		16½	49	87	108
38° 40′	11	23	28	40	17	45	73	95
38° 35′					16	40		
38° 30′	8	17	21	27	14	35	53	70
38° 25′					13	27		
38° 20′	5½		15	19	12	24	41	53
28° 10′	3½		10	14				

On voit — et cela ressort encore mieux de la représentation graphique donnée Pl. XIII, fig. 7 et 8 — que la distribution de la chaleur est ici tout autre que pour les gaz incandescents. L'inclinaison des courbes de radiation est beaucoup plus forte du côté des petites longueurs d'onde que du côté opposé, et cette différence d'inclinaison deviendrait encore un peu plus marquée, comme il est facile de le reconnaître, si l'on réduisait les courbes au spectre normal.

On remarquera, ensuite, que chez l'oxyde de cuivre, entre les limites de température indiquées, le maximum de radiation

éprouve bien quelque changement de place, mais un changement très minime ; tandis que le maximum du carbone se déplace au contraire d'une quantité assez notable, conformément aux observations de M. Langley et de MM. Desains et Curie. Chez le platine, également, le déplacement trouvé avait été très faible.

L'établissement de faits plus nombreux serait, en cette matière, extrêmement désirable, et il est à espérer que M. Langley, à cette heure probablement mieux outillé que tout autre pour de semblables recherches, ne nous fera pas seulement connaître — comme il l'a promis dans une de ses dernières publications — les valeurs absolues des différents rayons d'un même corps à toutes les températures comprises entre 0° C. et 2000° C., mais qu'il étendra cette connaissance à un grand nombre de corps différents. S'il se trouvait que réellement, chez le carbone, le sommet de la courbe de radiation se déplace plus que chez les autres éléments, cette propriété serait peut-être en rapport avec la grande variabilité de la chaleur spécifique de cette matière entre les températures dont nous disposons ; il y aurait alors lieu de rechercher si le bore et le silicium ne présenteraient pas, en ce qui concerne la variabilité de leur radiation, de l'analogie avec le carbone. L'existence de quelque lien entre le déplacement du maximum de radiation et l'augmentation de la chaleur spécifique à température croissante, n'est pas improbable. *Tous les deux*, en effet, ces phénomènes font présumer qu'à des températures plus basses la molécule de carbone est constituée d'atomes plus nombreux : le second phénomène, à raison de la règle de Dulong et Petit, le premier, à cause d'une relation qui paraît exister entre le poids moléculaire et la période de vibration (voir plus loin, p. 382). Mais, pour mettre nettement en évidence le lien supposé, il sera nécessaire de tenir compte, dans les considérations relatives à la chaleur spécifique et aux échanges de température, de la diversité des périodes de vibration chez les corps et, par suite, de leur aptitude

différente à être échauffés par des ondulations déterminées. Or, pour cela, le nombre des données n'est pas encore suffisant.

Finalement, je rapporterai encore une expérience isolée, qui était proprement destinée à former le premier terme d'une série de recherches sur l'absorption élective, et dont la mention aurait donc pu être omise ici, n'était-ce que le résultat en a contribué, dans une certaine mesure, au développement des idées qui seront exposées à l'article suivant.

Lorsqu'il eut été établi que la formation de la vapeur d'eau, avec dégagement de chaleur, donnait toujours lieu à l'émission d'un groupe de rayons déterminé, je voulus savoir si les périodes vibratoires correspondantes à ce groupe seraient reconnaissables aussi, distinctement, dans l'eau liquide. Je me proposai donc d'étudier le spectre d'absorption de l'eau.

Pour réaliser cette expérience dans toute sa pureté, je fis traverser aux rayons la nappe d'eau d'une petite chute, afin d'éviter l'influence perturbatrice des parois de verre; sans doute, on aurait pu éliminer cette influence, mais elle eût en tout cas nécessité l'emploi d'une source calorifique beaucoup plus forte, vu que le verre retient la majeure partie des rayons obscurs. De plus, avec la disposition adoptée, il était impossible que le corps absorbant, s'échauffant lui-même, intervînt dans le résultat par sa radiation propre.

Une mince feuille de laiton, dans laquelle on avait pratiqué une ouverture rectangulaire longue de 22 mm. et large de 7 mm., fut placée verticalement devant la fente. Un peu au-dessus de l'ouverture se terminait un tube de verre, qui était incliné sous un petit angle vers la feuille métallique, et d'où s'écoulait de l'eau à pression constante. L'eau s'étendait sur la feuille sous la forme d'une mince pellicule, non interrompue par l'ouverture; celle-ci était en quelque sorte bouchée par une petite nappe d'eau continue, dans laquelle on pouvait distinguer quelques lignes de courant, qui toutefois restaient parfaitement constantes de forme tant que la hauteur

de pression ne changeait pas. Lorsqu'on fermait l'accès à l'eau, puis qu'on le rouvrait, les mêmes lignes de courant réapparaissaient.

Comme source de chaleur servait un creuset de platine, qui présentait son ouverture à la fente et dont le fond était chauffé (au rouge) par une flamme de Bunsen. En chaque point du spectre je déterminais d'abord la radiation directe, en fermant l'accès à l'eau, puis, immédiatement après, la quatité de chaleur transmise par l'écran liquide; pour chaque espèce de rayons l'absorption se laissait alors exprimer en centièmes. Deux séries d'observations furent exécutées de cette manière; dans la plupart des points du spectre les résultats relatifs à ces deux cas concordent presque exactement; une seule fois, la différence dépassa 2 %

Voici les nombres de la seconde série:

Déviation minima des rayons.	Radiation directe.	Radiation transmise par la couche d'eau.	d'où absorption.	Déviation minima des rayons.	Radiation directe.	Radiation transmise par la couche d'eau.	d'où absorption
40°	3	2	33 %	39° 5′	215	18	91½ %
39° 50′	9	6	33	39° 2′ 30″	204	21	85
39° 40′	33	24	30	39°	177	24	86
39° 35′	67	49	27	38° 57′ 30″	164	16	90
39° 30′	135	88	35	38° 55′	141	11	92
39° 25	241	133	45	38° 50′	214 [2])	7	96
39° 20′	334	148	56	38° 45′	163	5	97
39° 15′	197 [1])	33	83	38° 40′	132	4	97
39° 12′ 30″	225	20	91	38° 30′	80	2½	97
39° 10′	214	15	93	38° 20′	52	1½	97
39° 7′ 30″	210	13	94	38° 10′	39	2	95

[1]) La source de chaleur fut affaiblie.

[2]) La source de chaleur fut renforcée.

Les observations correspondant aux trois premières de cette série manquent dans l'autre série, parce que la source de chaleur était alors généralement plus faible et que par suite les écarts étaient trop petits; les trois nombres de la colonne IV, relatifs à ces observations, méritent donc moins de confiance que les autres. Une inexactitude commune pèse d'ailleurs sur tous les chiffres d'absorption donnés, car il n'a pas été tenu compte de la réflexion aux deux surfaces de l'eau, et tous les chiffres sont par conséquent trop forts. Mais, comme nous n'avons aucune raison d'admettre une réflexion élective très prononcée, il existe une grande probabilité pour que nos observations représentent, d'une manière approximative, la marche de l'absorption.

Un coup d'œil jeté sur les nombres de la colonne IV semblerait indiquer un maximum d'absorption vers 39° 8′ et un second entre 38° 45′ et 38° 20′. Le premier maximum ne concorderait donc pas avec la plus forte radiation de la vapeur d'eau, puisque celle-ci tombe vers 39° 13′. Si toutefois nous représentons les résultats par un tracé figuratif (Pl. XIII fig. 1 *e*), on voit que la courbe d'absorption peut être considérée comme la superposition de deux lignes courbes différentes. Les choses se présentent comme s'il y avait un accroissement continu d'absorption depuis 39° 30′ jusqu'à 38° 45′, et que sur la pente ainsi formée se dressât une seconde élévation, qui posséderait à peu près la forme de la courbe de probabilité, si la base était horizontale. Le sommet de cette élévation ne se trouve alors pas vers 39° 8′, mais plus du côté des petites longueurs d'onde; de nouvelles recherches, faites avec soin, montreront probablement que sa position coïncide exactement avec celle du maximum de radiation de la vapeur d'eau.

Les périodes de vibration qui prennent naissance lors de la formation chimique de la vapeur d'eau sont donc distinctement reconnaissables aussi dans l'eau liquide, mais elles y sont accompagnées d'autres périodes, qui donnent

lieu à la seconde élévation de la courbe d'absorption, élévation dont le sommet n'est pas encore connu d'une manière certaine.

Il serait maintenant du plus haut intérêt de pouvoir déterminer aussi les courbes d'absorption de l'acide carbonique liquide, de l'acide sulfureux liquide et de l'acide chlorhydrique liquide, puisque nous avons appris à connaître les maxima de radiation de ces corps à l'état gazeux; mais les difficultés inhérentes à de semblables déterminations ne sont pas légères.

Si l'on était réellement conduit à admettre, comme loi générale, que dans les spectres d'absorption des liquides peuvent être reconnues les principales périodes de vibration de la vapeur correspondante, il en résulterait d'importantes déductions concernant la constitution des liquides. On ne saurait donc trop recommander l'étude approfondie du pouvoir absorbant électif, pour les rayons calorifiques, de différents liquides et de leurs vapeurs. Lorsque pour chaque point du spectre l'absorption est exprimée en centièmes de l'energie radiante propre à ce point, les courbes ainsi obtenues ont encore sur les courbes d'émission l'avantage d'être indépendantes du pouvoir absorbant électif de l'instrument thermométrique et des préparations de sel gemme, et de donner par conséquent, avec plus de fidélité que les courbes d'émission, l'image des intensités relatives des différentes périodes qui se rencontrent dans un même corps.

Remarques générales sur les résultats de ces expériences.

Si nous embrassons d'un regard les résultats fournis par l'observations des spectres d'émission des gaz qui brûlent, nous voyons, en premier lieu, que dans le spectre calorifique d'une flamme les différents produits de la combustion se laissent en général distinctement reconnaître, la chaleur de la flamme émanant essentiellement de ces produits et la radiation de

chacun d'eux occupant une place déterminée dans le spectre.

Chaque produit de combustion gazeux [1]) n'émet pas, toutefois, des rayons d'une espèce unique, mais un groupe d'ondulations, dont les intensités présentent, de part et d'autre d'un maximum, un décroissement continu et presque symétrique, de telle sorte que la courbe de radiation ressemble beaucoup à la courbe de probabilité. Ce résultat ne repose, il est vrai, que sur l'étude du spectre prismatique; mais, puisque dans toute la région où tombent les maxima trouvés la longueur d'onde est sensiblement une fonction linéaire de l'angle de déviation, la forme des différentes courbes de radiation, ramenées au spectre normal, conservera à très peu près le même type.

Les valeurs absolues des intensités, indiquées par les longueurs absolues des ordonnées des courbes d'émission, dépendent de la température et des dimensions de la flamme, de la vitesse d'écoulement des gaz combustibles, etc.; ces circonstances ont même de l'influence sur les intensités relatives des différentes ondulations d'un même produit de combustion, en ce sens, qu'elles peuvent modifier le degré d'inclinaison des courbes; mais *la place du maximum est pour chaque produit de combustion un élément constant*, qui ne dépend pas sensiblement de la température, et reste le même quelle que soit la composition du corps combustible.

Le résultat trouvé, à savoir, la forme à peu près symétrique des courbes simples et l'invariabilité de position de leurs maxima, ne peut tenir à une grande inexactitude de la méthode d'examen, par suite de laquelle des écarts assez

---

1) Jusqu'ici on n'a analysé que les spectres de flammes à produits de combustion gazeux J'ai fait une tentative pour soumettre à l'examen spectroscopique la flamme de l'hydrogène silicié, dans laquelle il se forme $Si\,O_2$, matière qui ne fond qu'à la flamme oxhydrique, et qui par conséquent, selon toute probabilité, apparaît directement à l'état solide lorsqu'elle si forme dans une flamme d'hydrogène.

Je n'ai pas réussi, toutefois, avec les moyens dont je disposais, à préparer $Si\,H_4$ en quantité suffisante.

notables auraient échappé à l'observation. En effet, avec les mêmes instruments et dans des conditions toutes semblables, on a trouvé aussi la forme asymétrique des courbes qui représentent la distribution de la chaleur sur le spectre des corps solides, et, de même que M. Langley, j'ai constaté un notable déplacement du maximum — du côté des petites longueurs d'onde en cas d'accroissement de la température — lorsque le corps radiant consistait en une feuille de cuivre recouverte de noir de fumée.

Ainsi qu'il a été dit, la nature des principales ondulations émises lors de la formation d'un produit de combustion ne dépend pas sensiblement de la manière dont les atomes constituants étaient groupés avant leur union. Que l'acide carbonique, par exemple, naisse de la combustion d'hydrocarbures, de celle de l'oxyde de carbone ou de celle du sulfure de carbone, toujours le maximum de radiation se montre exactement au même point du spectre. Ce fait éveille la présomption qu'il s'agit ici, non pas tant de mouvements périodiques qui dépendent de la nature de l'ébranlement causé par la réaction, mais plutôt de vibrations d'espèces déterminées, propres à la combinaison nouvellement formée.

La circonstance, ensuite, que lors de la production de chacun des composés en question il n'apparaît, avec grande intensité, qu'un seul groupe de rayons, rend probable que les ondulations émises nous font connaître les *périodes essentielles par lesquelles les molécules sont caractérisées.*

Nous sommes confirmés dans cette idée par le résultat de l'étude du pouvoir absorbant électif de l'eau (voir p. 373). Nous avons vu, en effet, que les mêmes rayons qui forment le gros de l'émission lorsque la *vapeur d'eau* prend naissance, sont aussi absorbés par l'*eau* en plus forte proportion que les ondulations tombant de part et d'autre, et que par conséquent il existe dans l'eau un très grand nombre de particules dont les vibrations caractéristiques concordent exactement en période avec les mouvements excités dans la flamme

de l'hydrogène. La confirmation eût été plus nette, sans doute, si l'on avait déterminé la courbe d'absorption de l'eau à l'état de vapeur, et si cette courbe n'avait *pas* présenté la seconde élévation; mais, à mon avis, l'hypothèse de la présence de polymères dans l'eau liquide n'a rien d'inadmissible; ces polymères seraient alors capables d'absorber des rayons de plus grande longueur d'onde et pourraient donc avoir donné lieu à l'apparition du second maximum. Ce n'est encore là qu'une hypothèse, toutefois, et par suite la forme de la courbe d'absorption obtenue ne peut nullement *prouver* que nous ayons appris à connaître la période vibratoire principale des molécules H_2O; il n'en est pas moins vrai que le résultat de l'étude en question augmente la probabilité de l'opinion émise.

C'est un fait connu, du reste, que les rayons calorifiques le plus fortement absorbés par la vapeur d'eau sont ceux qui émanent d'une flamme d'hydrogène, et que l'acide carbonique est à peu près impénétrable à la radiation d'une flamme d'oxyde de carbone.

M. Tyndall [1]) a fait tomber sur sa pile thermo-électrique la radiation d'une flamme d'hydrogène, à travers un tube de 4 pieds de longueur, poli en dedans, d'abord vide d'air, puis rempli d'air atmosphérique sec, enfin rempli d'air non desseché. L'air desséché absorba 0% de la radiation de la flamme d'hydrogène, l'air non desséché 17,2% et même, un jour plus humide, jusqu'à 20,3%; de la chaleur, au contraire, qu'émettait une spirale de platine portée à l'incandescence par l'électricité, l'air atmosphérique humide ne retenait que 5,8%. „De cette forte action de la vapeur atmosphérique sur la radiation de la flamme de l'hydrogène nous pouvons inférer," dit M. Tyndall, „qu'il y a synchronisme entre les vibrations moléculaires de la flamme à une température (suivant Bunsen) de 5898° Fahr. et celles de la vapeur aqueuse à une

---

1) Tyndall, *Heat a mode of motion*, 6e éd., p. 412.

température de 60° Fahr. L'énorme chaleur de la flamme de l'hydrogène augmente l'amplitude ou l'écart de la vibration atomique, mais ne change rien à la période de l'oscillation."

En ce qui concerne la radiation de la flamme de l'oxyde de carbone, voici, d'après M. Tyndall, la proportion centésimale qui en est absorbée par l'acide carbonique à différentes tensions :

Tension.	Absorption.
25mm,4	48,0 %
50 ,8	55,5
76 ,2	60,3
101 ,6	65,1
127 ,0	68,6
254 ,0	74,3 ;

en cas de densité suffisante, l'acide carbonique peut donc être réputé adiathermane pour la flamme de l'oxyde de carbone.

Du point de vue théorique, également, il est très probable que la chaleur excitée dans une flamme consiste en un mouvement rapide des produits de la combustion, suivant les périodes qui caractérisent ceux-ci.

Si l'on admet, en effet, que chaque molécule et chaque atome possède une durée de vibration déterminée par sa nature, on peut croire aussi qu'à une température donnée correspondra, pour chaque particule qui se meut librement, une amplitude moyenne *déterminée*. Alors seulement qu'elle possède cette amplitude-là, elle est en équilibre avec le milieu ambiant ; car, tandis que par son rayonnement elle perdrait de l'énergie et diminuerait donc en amplitude, le milieu ambiant — qui émet des ondulations de toutes les espèces possibles et par conséquent aussi de l'espèce dont la période concorde avec celle de la particule — lui apporte incessamment de l'énergie nouvelle, et de là doit résulter évidemment un état d'équilibre, où le mouvement de la particule conserve une même amplitude moyenne d'oscillation. Cette amplitude dépend de la force avec laquelle les rayons en question sont

émis par le milieu ambiant, c'est-à-dire, en général [1]), de la température seule.

Prenons maintenant deux gaz, l'hydrogène et le chlore, par exemple. A 10° C, chacun d'eux, considéré à part, est en équilibre avec un milieu ordinaire, et les deux espèces de molécules possèdent chacune leur période caractéristique et leur amplitude déterminée par la température. Aussitôt, toutefois, qu'elles s'unissent les unes aux autres — par affinité, ou quel que soit le nom donné à la cause — il se forme un nouveau corps, l'acide chlorhydrique, dont les molécules possèdent, elles aussi, leur durée de vibration caractéristique; mais on n'a absolument aucune raison pour supposer que l'amplitude de ces vibrations, au moment de leur naissance, sera tel que l'acide chlorhydrique soit en équilibre avec le milieu ambiant. Ce serait en effet un hasard bien singulier si le mouvement périodique tout nouveau, dont la grandeur dépend uniquement de l'énergie qui était disponible dans les éléments, possédait d'emblée une intensité telle, que les ondulation synchrones venant du milieu ambiant lui apportassent, par unité de temps, un renforcement tout juste égal à l'affaiblissement causé par sa propre radiation. Et quand même ce phénomène rare se présenterait pour un milieu déterminé, il ne pourrait subsister dans un autre milieu, où la répartition de l'énergie entre les différentes ondulations ne serait pas la même, où, en un mot, la radiation à „période d'acide chlorhydrique" serait, en ce qui concerne l'intensité,

---

[1]) A savoir, lorsque le milieu ambiant ne change pas de nature. A la même température, toutefois, un autre milieu peut très bien émettre les rayons en question avec une autre intensité, de sorte que, si l'on transportait la particule d'un milieu dans un autre, il pourrait arriver que cela eût le même résultat, par rapport à l'amplitude de la particule, qu'un changement de température. Telle est peut-être l'explication de certains phénomènes chimiques, par exemple, du fait que la seule présence d'une matière peut causer la décomposition d'un autre corps, qui, dans un milieu ordinaire, ne se dissocie qu'à une température supérieure. Rappelons la décomposition du chlorate de potasse en présence du peroxyde de manganèse, etc.

dans un autre rapport avec les radiations à période de chlore et à période d'hydrogène que cela n'était le cas dans le premier milieu.

Nous pouvons donc prédire qu'en général une combinaison nouvellement formée ne sera *pas* en équilibre avec le milieu ambiant; que la période caractéristique de la combinaison se manifestera initialement avec une amplitude plus grande ou plus petite que celle qui peut subsister à la température des objets environnants, et que par conséquent le corps, aussitôt après sa naissance, émettra ou absorbera des rayons de chaleur qui par leur longueur d'onde feront connaître les périodes propres aux particules. Le premier cas se présente, par exemple, lors de la combustion, le second, lors de la préparation des mélanges réfrigérants.

Tout indique donc que l'étude des maxima de radiation et des maxima d'absorption nous offre le moyen d'arriver à la connaissance d'une série de nouvelles et précieuses constantes physiques: celle des *périodes vibratoires caractéristiques des molécules.*

En tant que le tableau de la page 336 et la courbe tracée d'après ces chiffres sur la Pl. XIII représentent exactement le rapport entre les longueurs d'onde des rayons et leurs angles de déviation minima dans le prisme de sel gemme, il est possible de donner les longueurs des ondulations qui, suivant les observations décrites, sont émises *in maximo* par les différents produits de combustion [1]).

---

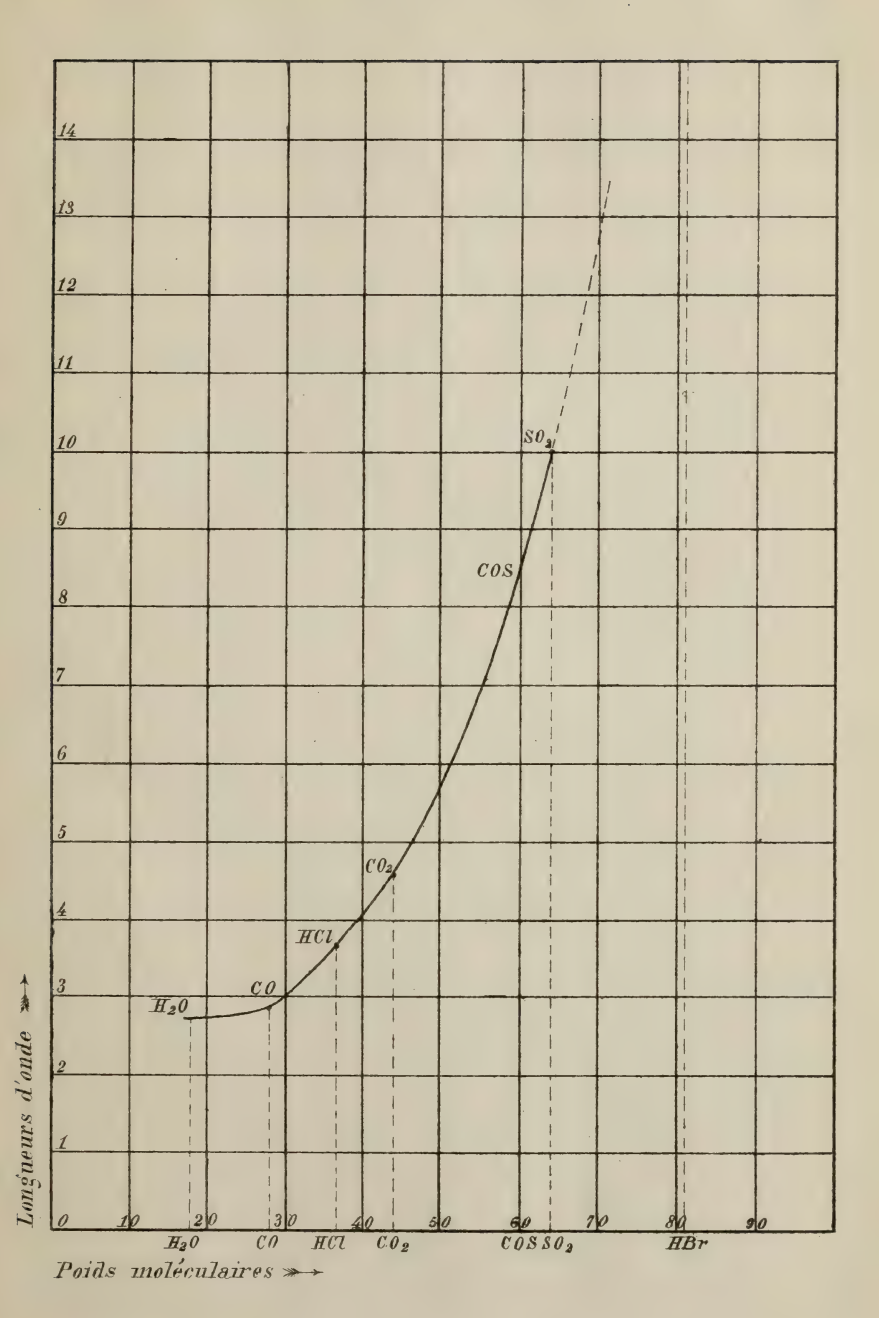
[1]) Il reste toujours, dans ces expériences, quelque incertitude quant à la valeur absolue des déviations dans le spectre obscur. Car, après la mise au point sur la raie *D*, on fait reculer le bolomètre d'environ 15 mm. pour l'amener dans le plan focal des rayons obscurs moyens, puis on le fait descendre à l'effet de remplacer dans le spectre le fil de pointage par la bandelette bolométrique. Il faut que, pendant la première de ces manipulations, le fil glisse exactement le long de l'axe optique de la lentille de sel gemme, et qu'ensuite le *milieu* de la bandelette prenne la place, préalablement occupée par le fil de pointage. Or, la disposition actuelle du spectrobolomètre ne permet pas de s'assurer de ces coïncidences. De

Corps radiants.	Poids moleculaires.	Longueurs d'onde des rayons caractéristiques.
H_2O	18	2^μ,73
CO (?)	28	2,85
HCl	$36\frac{1}{2}$	3,68
CO_2	44	4,57
COS	60	8,48
SO_2	64	10,01
HBr	81	> 15,..(?)
P_2O_5	142	> 80,..(?)

Si l'on prend les poids moléculaires pour abscisses et les longueurs d'onde pour ordonnées, les extrémités de celles-ci tombent, comme le montre la figure ci-jointe, sur une courbe très rapidement ascendante, d'un cours assez uniforme. Prolongée conjecturalement, cette courbe fait prévoir le maximum de HBr vers 18^μ et celui de P_2O_5 au-delà de 60^μ.

L'expérience mentionnée p. 358, concernant la radiation d'une flamme dans laquelle il se forme de l'acide bromhydrique, n'était pas décisive, à la vérité, mais je crois néanmoins pouvoir en conclure que les rayons principalement émis par HBr ne tombent pas dans la partie du spectre où la longueur d'onde est moindre que 15^μ. Quant à la période principale de P_2O_5, il résulte, de ce qui a été dit p. 368, que l'explication la plus probable des faits observés se trouve dans l'admission d'un maximum de rayonnement dont la déviation, occasionnée par un prisme de sel gemme de 60°, serait inférieure à 25°. S'il est permis de prolonger jusque-là

là peut donc résulter une erreur constante dans la position des maxima par rapport à la raie du sodium; car à un écart de 0,1 mm. seulement correspondrait une différence de plus d'une minute dans la déviation observée; mais ni le caractère général, ni les distances mutuelles des élévations trouvées n'en seront sensiblement modifiés.



14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
SO2
COS
CO2
HCl
CO
H2O
H2O
CO
HCl
CO2
COS SO2
HBr
Longueurs d'onde
Poids moléculaires

la courbe de dispersion de M. Langley, la longueur d'onde, en ce point, sera déjà de plus de 80μ, et la longueur d'onde de la radiation de P_2O_5 paraît encore surpasser cette valeur.

Je présenterai encore une dernière remarque, à propos du fait, découvert par M. Langley, que le spectre solaire s'arrête assez brusquement vers $\lambda = 2\mu,7$. Voici comment M. Langley décrit ce phénomène:

„Ensuite, en me servant du réseau, j'ai déterminé par l'observation directe les longueurs d'onde de la région de chaleur solaire la plus récemment découverte, et j'ai montré qu'il existait une longueur qu'on n'avait pas soupçonnée, de $2\mu,7$, c'est-à-dire 27000 de l'échelle d'Angström. Ici la chaleur solaire cesse sensiblement et d'une façon relativement brusque, comme si elle était remplacée par une bande froide d'une étendue indéfinie. Je ne prétends pas affirmer qu'il n'existe absolument pas de chaleur au-delà (à vrai dire, il y a quelques indications douteuses de chaleur au-delà de ce point, comme je l'ai dit), mais que, s'il y en a, elle est à peu près infinitésimale".

Or, à $2\mu,73$ se trouve, comme nous l'avons vu, le maximum de radiation de la vapeur d'eau, et nous avons donc toutes raisons d'affirmer que les rayons de cette longueur d'onde seront très fortement absorbés par l'atmosphère. La terminaison du spectre solaire, au point indiqué, paraît donc devoir être attribuée à l'action absorbante de la vapeur d'eau atmosphérique. Des ondulations de longueur plus grande, au contraire, pourront de nouveau atteindre la surface de la terre, et paraissent réellement, d'après le passage cité de M. Langley, exister dans le spectre solaire; mais nous sommes fondés à croire qu'on ne parviendra jamais — si ce n'est à de très grandes altitudes — à y trouver des rayons dont la longueur d'onde s'élèverait à environ $4\mu,57$, car ces rayons, à supposer que la chaleur solaire les renferme, seraient infailliblement retenus par l'acide carbonique de l'atmosphère.

LE COEFFICIENT ISOTONIQUE DE LA GLYCERINE,

PAR

HUGO DE VRIES.

Depuis les déterminations que j'ai faites des coefficients isotoniques des matières qui se trouvent le plus fréquemment dans le suc des cellules végétales, l'attention des botanistes s'est de plus en plus portée sur la glycérine. Or, cette substance ne figurant pas dans mon tableau des coefficients en question, j'ai pensé qu'il y aurait de l'intérêt à l'étudier, elle aussi, à ce point de vue [1]). Il n'était guère douteux, à la vérité, que la glycérine ne suivît la règle générale des composés organiques et que, par suite, son coefficient ne fût à peu près le même que celui des sucres et des acides organiques; mais, pourtant, une détermination expérimentale directe ne m'a pas paru entièrement superflue.

Avant de faire connaître le résultat obtenu, je parlerai des faits qui ont motivé cette étude.

Ces faits sont de deux espèces. Les uns ont rapport à l'absorption de la glycérine comme aliment, les autres à l'action de cette substance comme réactif plasmolytique.

Lorsque des fragments de feuilles vertes, coupés à l'aide

---

[1]) La glycérine manque aussi dans les tableaux de M. Hamburger, qui, pour la détermination des coefficients isotoniques, a eu recours à l'action des matières dissoutes sur les corpuscules sanguins. Voir: *Onderzoekingen van het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool*, 3e reeks, IX, 1884, p. 26.

de ciseaux, sont déposés à la surface d'une dissolution étendue de sucre de canne ou de sucre de raisin, de telle façon que ce liquide puisse pénétrer dans les vaisseaux ouverts et que néanmoins l'air continue à arriver par les stomates aux cellules du parenchyme, on remarque que ces cellules peuvent se nourrir de la solution qui leur est offerte. A ses dépens, en effet, elles peuvent, dans l'obscurité, fabriquer de la fécule. C'est ce qui est mis en évidence lorsque, avant l'expérience, les feuilles ont été complètement dépouillées de leur fécule par un séjour prolongé dans l'obscurité. On retrouve alors, quelques jours après l'absorption du sucre, de la fécule dans les grains de chlorophylle Ces expériences ont été faites pour la première fois par M. Böhm et décrites dans la *Bot. Zeitung* de 1883, n°. 3. Dans le même Journal, M. Arthur Meyer annonça, en 1886, n°. 5, que ces expériences réussissent non seulement avec différentes sortes d'hydrates de carbone et avec la mannite, mais aussi avec la glycérine. Ce sont surtout les feuilles d'une Composée, le *Cacalia suaveolens*, qui assimilent facilement la glycérine. Après avoir séjourné sur ce liquide, employé de préférence en solution à 10 %, ces feuilles ont, ordinairement déjà au bout de 4—6 jours, formé de la fécule dans toutes les cellules.

Ces expériences s'exécutent d'une manière plus simple et plus élégante en prenant, au lieu de fragments de feuilles, des Algues d'eau douce. M. Klebs, opérant sur un *Zygnema*, a trouvé que cette Algue peut absorber de la glycérine et en former de la fécule. J'ai observé la même chose avec le *Spirogyra nitida*, qui, à une température favorable (20—25° C.), avait, déjà après un séjour de deux fois vingt-quatre heures dans la glycérine à l'obscurité, fabriqué de la fécule en quantité notable. Aussi peut-on cultiver ces deux Algues des semaines entières dans l'obscurité, à la seule condition de les nourrir du susdit composé organique.

Le second groupe de faits est de date encore plus récente. L'année dernière, M. Klebs communiqua, dans les *Berichte der*

deutschen botanischen Gesellschaft (T. V, p. 187), qu'il avait plasmolysé par la glycérine des cellules de *Zygnema*, et que cette plasmolyse, d'abord assez forte, avait ensuite disparu peu à peu. Cela ne pouvait s'expliquer qu'en admettant que la glycérine avait pénétré, à travers le protoplasma, dans le suc cellulaire, dont la concentration s'était ainsi trouvée augmentée. Le grand intérêt de ce cas tenait surtout à ce qu'il était entièrement isolé. Dans mes expériences sur la plasmolyse, en effet, celle-ci, une fois engagée, n'avait plus jamais disparu, à moins qu'on n'eût enlevé le réactif par des lavages, ou fait mourir les protoplastes par un poison faible ou par un trop long séjour dans le liquide. Et dans les expériences de M. Klebs, la glycérine fut la seule substance qui put, sans préjudice, traverser en aussi grande quantité le protoplasma vivant du *Zygnema* [1]. J'ai commencé par répéter ces expériences en opérant sur le *Spirogyra nitida*, et j'ai reconnu que, chez cette plante également, dans des solutions de 3,3 à environ 7%, la plasmolyse d'abord produite disparaît bientôt: au bout de quelques heures dans les solutions les plus faibles, au cours d'une couple de jours dans les plus fortes. Les filaments recouvrent alors toute leur raideur, de sorte qu'il n'est pas même besoin d'un examen microscopique pour se convaincre de la disparition de la plasmolyse. Dans cet état, ils continuent aussi à croître, sans le moindre trouble, au sein des solutions de glycérine.

Ensuite, j'étudiai des plantes vasculaires. Là encore, la plasmolyse dans la glycérine ne tarda pas à s'effacer, et cette substance passa donc assez vite à travers le protoplasma, sans, l'endommager sensiblement. Tel fut le résultat, par exemple,

---

[1] Des phénomènes analogues ont été observés, l'an dernier, par M. Janse, sur des *Chaetomorpha* et *Spirogyra* placés dans des dissolutions de salpêtre et de chlorure de sodium (*Botan. Centralblatt*, 1887, VIII n°.40). Ces matières toutefois, sont loin de passer aussi facilement que la glycérine à travers le protoplasma vivant, et elles n'ont pas non plus la même innocuité que cette substance.

chez *Tradescantia zebrina*, *Vriesea splendens*, *Coleus Verschaffelti*, *Haemanthus albiflos* et *Impatiens Sultana*. La propriété en question est donc très généralement répandue dans le règne végétal.

Demandons-nous maintenant ce que ces faits peuvent nous apprendre au sujet du rôle de la glycérine Une des propriétés les plus caractéristiques des cellules végétales, c'est que leur protoplasma n'est que très difficilement perméable aux matières dissoutes. Les sels, les différents sucres, en un mot toutes les substances inoffensives qui ont été examinées à cet égard, le traversent en général si mal que leur accumulation dans le suc cellulaire ne peut être constatée par voie plasmolytique. Dans les plantes vasculaires, la glycérine seule fait exception; elle est transmise assez facilement par les mêmes protoplastes qui se montrent si peu perméables aux autres matières. Il est à présumer que ce phénomène a une signification bien déterminée pour la vie des cellules.

Lors des expériences ci-dessus citées, sur la nutrition des feuilles par les hydrates de carbone et la mannite, M. Arthur Meyer a trouvé que les feuilles de plantes différentes se comportent, dans une solution de la même matière, d'une façon différente. En général, les espèces qui assimilaient le plus facilement une matière étaient celles qui, dans la vie ordinaire, peuvent elles-mêmes donner naissance au composé dont il s'agit. Ainsi, les feuilles de beaucoup d'*Oleacées* sont connues pour leur richesse en mannite, et ce sont précisément ces plantes-là qui, mieux que toute autre espèce végétale, absorbent à l'obscurité la mannite et la transforment en fécule. La même chose se vérifie chez les *Silénées* par rapport à la galactose, et dans nombre d'autres cas.

S'il était permis d'appliquer cette observation à la glycérine, on serait conduit à penser que cette substance est beaucoup plus répandue dans le règne végétal qu'on ne l'admet présentement, et que peut-être elle joue, au moins en des cas assez nombreux, un rôle important dans le transport et

l'assimilation des matières organiques. Son aptitude à être transformée en fécule par des cellules vertes montre suffisamment que des raisons sérieuses peuvent être invoquées en faveur de cette présomption.

Quoi qu'il en soit, il est à prévoir que l'attention s'attachera de plus en plus à la glycérine considérée comme matière nutritive des plantes, et que, partant, cette substance fera bientôt, de divers côtés, l'objet d'expériences. Dans les expériences de ce genre, la concentration des dissolutions, comparée à celle du suc cellulaire, exerce toujours une influence capitale. Tantôt la tension osmotique des deux liquides devra être la même, tantôt elle devra différer. Or, pour pouvoir calculer d'avance, à l'aide de la valeur isotonique du suc cellulaire, celle des solutions de glycérine à employer, il faut naturellement connaître le coefficient de cette substance. Telles sont les raisons qui m'ont engagé à effectuer la détermination de ce coefficient.

Parmi les plantes indicatrices de mes expériences antérieures, le *Begonia manicata* était celle qui présentait le plus de résistance au passage des matières dissoutes à travers le protoplasma. J'ai donc recherché, en premier lieu, si les protoplastes de cette plante laissaient passer la glycérine en quantité plasmolytiquement appréciable. Le résultat fut négatif: une fois commencée, la plasmolyse, si faible qu'elle soit, ne disparaît plus dans ces cellules. Le *Tradescantia discolor*, l'une des deux autres plantes indicatrices, n'éprouva au contraire dans la glycérine qu'une plasmolyse transitoire et était par conséquent impropre à la détermination du coefficient isotonique. Quant à la troisième indicatrice, je ne l'avais pas, cette fois, à ma disposition. J'ai donc dû borner mes expériences au *Begonia* susnommé.

La détermination eut lieu exactement de la manière décrite précédemment [1]). Comme matériaux, je choisis les écailles

[1]) Pringsheim's *Jahrbücher f. Wiss. Bot.*, Bd. XVI, p. 450–465.

rouges qui entourent le pétiole au voisinage immédiat du limbe de la feuille, plus spécialement, l'épiderme de la face supérieure des écailles annulaires supérieures. De cet épiderme furent faites douze préparations microscopiques, dont chacune contenait plusieurs centaines de cellules rouges, et qui, d'après l'expérience acquise antérieurement, étaient suffisamment comparables entre elles. Pour chaque expérience on employait, bien entendu, une nouvelle feuille. La concentration la plus faible, à laquelle dans ces cellules se produise encore la plasmolyse, tombe pour le nitre entre 0,12 et 0,10 molécule, et pour la glycérine entre 0,20 et 0,30 molécule. Partant de cette détermination provisoire, je préparai des dissolutions de 0,12, 0,13, 0,14, 0,15. 0,16 et 0,17 mol. de nitre, et de 0,20, 0,22, 0,24 0,26, 0,28 et 0,30 mol. de glycérine, dans lesquelles je plongeai les douze préparations d'une même écaille annulaire. De chaque dissolution on prenait, pour cela, environ 10 cc. Au bout de 2—5 heures on pouvait être assuré qu'un état d'équilibre s'était établi; les préparations étaient alors soumises à l'examen microscopique. Dans quelques-unes des expériences je répétai cet examen quelques heures plus tard, afin de me convaincre que la limite n'avait pas varié. Effectivement, aucun déplacement ne fut constaté.

Des six expériences, les cinq premières ont été exécutées avec des feuilles du *Begonia manicata* ordinaire, chaque feuille étant cueillie, autant que possible, sur un pied différent. Pour la sixième expérience, on se servit de la variété *B. manicata variegata*. Toujours on choisissait, parmi les feuilles encore saines des plantes, celles qui étaient les plus anciennes. La durée des expériences fut: pour I, deux heures; pour II et III, trois heures; pour IV et V, quatre heures; pour VI, quatres heures et demie.

Dans le tableau ci-dessous ne figurent que celles des dissolutions employées qui embrassaient immédiatement la limite. En tête des colonnes sont inscrits les degrés de concentration,

exprimés en molécules-grammes par litre. Les dissolutions contiennent donc par litre autant de fois 92 grammes de glycérine que l'indiquent les nombres inscrits. Ces dissolutions furent faites en étendant convenablement de la glycérine pure, d'une densité de 1,249 = 95 % [1]).

C. I. désigne la concentration qui, d'après l'expérience, est isotonique à celle du suc cellulaire, Le rapport de ces chiffres pour le nitre et la glycérine est marqué dans la dernière colonne. La moyenne de ces rapports, multipliée par le coefficient isotonique du nitre = 3, donne le coefficient de la glycérine.

Les autres lettres signifient: *n*, aucune cellule plasmolysée; *hp*, environ la moitié des cellules plasmolysées; *p*, toutes les cellules plasmolysées. Je renvoie d'ailleurs, pour de plus amples détails sur la composition et la valeur de pareils tableaux, à ma communication antérieure [2]).

	Glycérine.					Nitre potassique.					
	0,20	0,22	0,24	0,26	C. I	0,13	0,14	0.15	0,16	C.I.	Rapport.
I	*n*	*hp*	*p*	*p*	0,22	*n*	*p*	*p*		0,135	0,614
II		*n*	*p*	*p*	0,23	*n*	*hp*	*p*		0,14	0,608
III		*n*	*n*	*p*	0,25	*n*	*hp*	*p*		0,14	0,560
IV		*n*	*hp*	*p*	0,24	*n*	*hp*	*p*		0,14	0,583
V		*n*	*hp*	*p*	0,24		*n*	*hp*	*p*	0,15	0,625
VI		*n*	*n*	*p*	0,25	*n*	*hp*	*p*		0,14	0,560

En moyenne, on a donc pour la glycérine:

Rapport des concentrations isotoniques 0,592
Coefficient isotonique 1,78

Comparons maintenant ce chiffre avec les valeurs correspondantes trouvées pour les autres composés organiques qui ont été étudiés sous ce rapport, ainsi qu'avec les abaissements

[1]) Strohmer, dans Fresenius' *Zeitschrift für analytische Chemie*, XXIV, 1885, p. 107.

[2]) Pringsh. *Jahrb.*, *l c.*

moléculaires du point de congélation [1]). Les premières ne s'écartent pas beaucoup du chiffre 2, et de même les seconds ne s'éloignent guère de 18,5. J'emprunte les abaissements moléculaires au tableau étendu de M. Raoult, dans lequel la loi en question est démontrée pour une trentaine de matières organiques, les unes azotées, les autres non azotées [2]).

	Coefficient isotonique.	Abaissement du point de congélation.
Glycérine	1,78	17,1
Sucre de canne	1,88	18,5
Sucre interverti	1,88	19,3
Acide malique	1,98	18,7
„ citrique	2,02	19,3
„ tartrique	2,02	19,5

Je regarde donc comme démontré que la glycérine suit mes lois des coefficients isotoniques.

---

[1]) Pringsh. *Jahrb.*, *l.c.*, p, 512.

[2]) F. M. Raoult, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 5e sér., T. XXVIII, 1883, p.5 et 11 du tiré à part.

ELUCIDATION GRAPHIQUE

DE LA

RÈGLE GÉNÉRALE POUR LA FORME DE LA TRAJECTOIRE ET LES PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT CENTRAL,

PAR

G. SCHOUTEN.

I. Introduction.

Les résultats généraux exposés dans mon Mémoire: *Règle générale pour la forme de la trajectoire et la durée du mouvement central* [1]), ont été déduits principalement de l'équation

$$\tfrac{1}{2}\, r'^2 = \tfrac{1}{2}\, r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3}\, d\, r,$$

en cherchant si, et à quelles distances du centre, la vitesse radiale devient nulle, autrement dit, en déterminant les racines de l'équation:

$$\tfrac{1}{2}\, r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3}\, d\, r = 0.$$

Dans les pages suivantes, ces racines seront construites *graphiquement*. Les courbes dont les intersections mutuelles donneront les racines peuvent être choisies de manière que l'une d'elles se transforme en droite; la direction de cette droite est déterminée par la *vitesse aréolaire* du mouvement

---

[1]) *Verslagen en Mededeelingen der Koninkl. Akad. van Wetensch.* Afd. Natuurk., 3de Reeks, Deel III.

Arch. néerland., T. XXII, p. 158.

(c'est-à-dire, par l'aire que le rayon vecteur décrit dans l'unité de temps), tandis que sa situation absolue dans le plan ne dépend que de l'*énergie* avec laquelle le mouvement s'exécute.

L'autre courbe est déterminée uniquement par la loi d'action de la force.

Si donc cette courbe est dessinée d'après un système de coordonnées rectangulaires, toute droite tracée dans son plan fera connaître, dans les points où elle la coupe, les distances auxquelles sont situés les péricentres et les apocentres de la trajectoire. La *vitesse aréolaire* avec laquelle le mouvement a lieu sur cette trajectoire sera déterminée par l'angle que la droite fait avec l'axe des abscisses, tandis que l'*énergie* du point mobile est donnée par le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Un déplacement de la droite dans le plan indiquera graphiquement le rapport qui existe entre *la situation et la dimension* de la trajectoire et *la vitesse aréolaire et l'énergie* du mouvement sur cette trajectoire; il nous conduira ainsi à une règle concordant avec celle qui a été formulée au § 51 du Mémoire ci-dessus cité.

On verra, en outre, que la courbe possède des caractères dont la connaissance nous permet de lire sur une figure une foule de propriétés du mouvement central. Nous retrouverons de cette manière toutes les propriétés des trajectoires mentionnées soit dans mon Mémoire antérieur, soit dans celui de M. Korteweg: *Sur les trajectoires décrites sous l'influence d'une force centrale* [1]).

Comme, de sa nature même, la méthode graphique ne nous apprend rien concernant la durée du mouvement, et que, pour pouvoir juger du mouvement réel, il est pourtant nécessaire de savoir si sa durée est finie ou non, je renverrai par la

---

[1]) *Versl. en Mededeel. der Kon. Akad. v. Wetens.*, Afd. Natuurk., 2de Reeks, Deel XX.

Arch. néerl., T. XX, p. 391.

notation (*R. G.* §) au § de *Règle générale* etc. où le calcul décide à cet égard.

L'honneur de l'heureux choix des courbes qui déterminent dans ce cas les racines de l'équation revient à M. B. Peirce. Du moins, dans son ouvrage *A system of Analytic Mechanics*, il applique la méthode graphique ; et bien que son ignorance des trajectoires à cercles asymptotiques intérieurs et extérieurs ait occasionné une lacune dans cette application, les résultats auxquels il est arrivé sont d'une simplicité si inattendue, qu'ils m'ont engagé à essayer de combler la lacune en question.

II. La courbe potentielle et la droite aréolaire.

Si dans la formule (6) de (*R. G.* § 2), savoir

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3} \, d r,$$

nous posons

$$\int - F \, d r = U,$$

$$\int - \frac{C^2}{r^3} \, d r = V,$$

elle se transforme en

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + V_0 - V + U - U_0,$$

ou aussi, à cause de

$$\tfrac{1}{2} r_0'^2 + V_0 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \frac{C^2}{2 r_0^2} = \tfrac{1}{2} v_0^2,$$

en

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = U - (V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2).$$

La première condition pour la possibilité du mouvement étant que r'^2 n'ait pas de valeurs négatives, le mouvement

ne pourra avoir lieu qu'à des distances pour lesquelles on aura :

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2.$$

Prend-on maintenant U pour ordonnée y d'un système de coordonnées rectangulaires dont r est l'abscisse, alors

$$y = U$$

représentera l'équation d'une courbe dont la forme dépend seulement de la loi d'action de la force, et à laquelle M. Peirce a donné le nom de *courbe potentielle.*

De même, si l'on prend $V + U_0 - \frac{1}{2} v_0^2$ pour ordonnée,

$$y = V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

représente l'équation d'une seconde courbe, dont la forme ne dépendra que de la *vitesse aréolaire* $\frac{1}{2}\ C$, et qui sera par suite appelée *courbe aréolaire.*

Si les deux courbes sont tracées sur le même système de coordonnées, toutes les parties de la courbe potentielle dont les ordonnées sont plus grandes que les ordonnées correspondantes de la courbe aréolaire, ou qui, comme nous l'exprimerons dans la suite, sont situées *au-dessus* de la courbe aréolaire, indiqueront les distances où le mouvement est possible.

2. Puisqu'on a $V = \dfrac{C^2}{2r^2}$, la courbe aréolaire se transformera en ligne droite si, au lieu de r, on prend $\dfrac{1}{r^2}$ pour abscisse.

Choisissons donc, à l'exemple de M. Peirce, $\dfrac{1}{r^2}$ pour abscisse x, et exprimons aussi U en x; alors

$$y = U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$y = \tfrac{1}{2} C^2 x + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2 \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

représentent respectivement l'équation de la *courbe potentielle* et celle de la *droite aréolaire.*

3. Lorsqu'à la force F on en ajoute une nouvelle, de la forme

$\frac{\mu}{r^3}$, U est augmenté de $\frac{\mu}{2\,r^2}$ ou $\frac{1}{2}\,\mu\,x$. Pour la valeur de r'^2, toutefois, le résultat sera le même si, ne touchant pas à U, on diminue V de la quantité $\frac{1}{2}\,\mu\,x$. Cette diminution de V changera C^2 en $C^2 - \mu$, de sorte qu'augmenter la force centrale de la valeur $\frac{\mu}{r^3}$ équivaut à diminuer C^2 de μ [1]).

4. Propriétés de la courbe potentielle.

La tangente à la courbe potentielle fait avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente $\frac{d\,y}{d\,x}$ est donnée par

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,U}{d\,r} : \frac{d\,x}{d\,r} = -\tfrac{1}{2}\,F\,r^3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (3)$$

Il en résulte que:

Pour des abscisses croissantes, la courbe potentielle s'élève en cas de forces attractives, s'abaisse en cas de forces répulsives [2]).

Par conséquent, là où la courbe potentielle est parallèle à l'axe des abscisses, la force est nulle; là où la courbe est perpendiculaire à cet axe, la force est infinie. Pour $F = \frac{\mu}{r^3}$ la courbe potentielle est une ligne droite.

5. On a ensuite:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,\frac{1}{2}\,F\,r^3}{d\,r} : \frac{d\,x}{d\,r} = -\tfrac{1}{4}\,r^3\,\frac{d\,F\,r^3}{d\,r} \quad . \, . \, . \, . \, . \quad (4)$$

D'où il résulte:

Les parties de la courbe potentielle qui ont leur *convexité* tournée vers l'axe des ordonnées indiquent les distances pour lesquelles $F\,r^3$ est une fonction croissante de r; les parties, au contraire, qui tournent leur *concavité* vers l'axe des ordonnées font connaître les distances pour lesquelles $F\,r^3$ est une fonction décroissante de r. Tout point d'inflexion de la courbe

---

1) Ainsi se trouve démontrée la proposition de (*R. G.* § 4). Cette démonstration a été donnée par M. Peirce, § 707.

2) Peirce § 709.

potentielle donne une distance pour laquelle $F r^3$ atteint une valeur maxima ou minima.

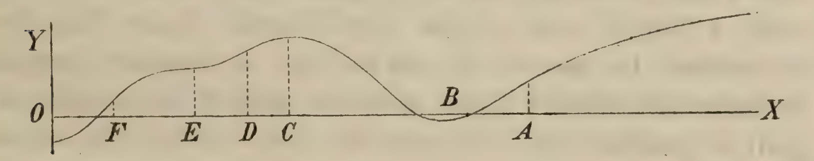
A l'aide des dénominations dont M. Korteweg s'est servi dans son Mémoire [1]), les propriétés ci-dessus se laissent exprimer de la manière suivante:

Dans une région de répulsion, la courbe potentielle s'abaisse du côté des abscisses croissantes.

Dans une région de stabilité, la courbe potentielle présente sa CONVEXITÉ *au côté* POSITIF *de l'axe des ordonnées; dans une région d'instabilité, elle y présente sa* CONCAVITÉ. *Tout point d'inflexion dans une partie ascendante marque donc la limite entre une région de stabilité et une région d'instabilité.*

Dans une région de la raison inverse du cube la courbe potentielle est une droite.

Une fois tracée, la courbe potentielle fera donc connaître les différentes espèces de régions dont se compose le champ du mouvement.



Si la ligne ci-dessus est la courbe potentielle pour une certaine loi d'action, une *région de stabilité* s'étendra autour du centre, jusqu'à une distance indiquée par le point A. Viendront ensuite successivement, à mesure qu'on s'éloigne vers l'espace infini, une *région d'instabilité* $A\,B$, une *région de répulsion* $B\,C$, une *région de stabilité* $C\,D$, une *région d'instabilité* $D\,E$, une *région de stabilité* $E\,F$, enfin une *région d'instabilité* $F\,O$.

1) Korteweg § 3. La région où la force exerce une action *répulsive* est dite *région de répulsion;* celle où la force est *attractive* s'appelle *région de stabilité* si $F r^3$ est une fonction croissante de r, *région d'instabilité* si cette fonction est *décroissante.* Lorsque $F r^3$ est constant, la région est désignée comme *région de la raison inverse du cube.*

6. Le chemin vers le centre est ouvert au point mobile lorsque, pour $r = 0$ ou $x = \infty$, on a

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2.$$

Or, pour $r = 0$, on a $V = \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3}\, d\,r$ et $U - U_0 = \int_0^{r_0} F\, d\, r$,

de sorte que l'inégalité ci-dessus se transforme en

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_0^r F\, d\, r \geqq \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3}\, d\, r,$$

ce qui, d'après les notations de (*R. G.* § 44), peut être écrit de la manière suivante:

$$E \geqq E_0.$$

Cela s'accorde, suivant (*R. G.* § 51), avec le calcul. Suivant (*R. G.* § 52), la branche spirale qui conduit au centre aura un nombre *fini* ou *infini* de circonvolutions selon que $\varphi(0)$ (étant posé $F r^3 = \varphi(r)$) est *infiniment grand* ou *fini*, c'est-à-dire, selon que la courbe potentielle, quand l'abscisse croît à l'infini, a ou n'a pas pour direction limite l'axe des ordonnées. Le second de ces cas doit se présenter lorsque le centre est entouré d'une *région de stabilité*; le premier ne peut se produire que si autour du centre s'étend une *region d'instabilité.*

Corollaire. Puisque, pour toutes les distances auxquelles le mouvement a lieu, la courbe potentielle doit être située *au-dessus* ou *sur* la droite aréolaire, on aura nécessairement

$$C^2 \leqq \varphi(0)$$

lorsque la trajectoire s'étend jusqu'au centre. Mais cette condition, en ce qui concerne $C^2 = \varphi(0)$, n'est pas suffisante. Dans le cas, en effet, où le centre est entouré d'une *région d'instabilité*, la courbe potentielle aura une asymptote. Or, si la droite aréolaire a la direction de cette asymptote, mais

qu'elle soit située *au-dessus* de celle-ci, elle coupera certainement la courbe potentielle, de sorte que l'accès au centre sera interdit.

Le même résultat a été obtenu par le calcul dans (*R. G.* § 33—36), où l'on a montré que pour $C^2 = \varphi\,(0)$ le centre n'est atteint que si l'on a, en même temps, $E > E_0$.

7. Le chemin vers l'infini est ouvert au point mobile, lorsque, pour $r = \infty$ ou $x = 0$, on a:

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0{}^2.$$

Mais pour $r = \infty$ on a $V = 0$ en $U - U_0 = -\int_{r_0}^{\infty} F\,d\,r$,

de sorte que l'inégalité se change en celle-ci

$$\tfrac{1}{2} v_0{}^2 - \int_{r_0}^{\infty} F\,d\,r \geqq 0,$$

ou

$$\tfrac{1}{2} v_0{}^2 + \int_0^{r_0} F\,d\,r \geqq \int_0^{\infty} F\,d\,r,$$

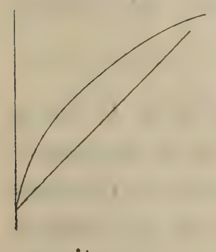
laquelle, à l'aide des notations de (*R. G.* § 44), peut être écrite:

$$E \geqq E_\infty.$$

Cela s'accorde avec le calcul (*R. G.* § 51).

Corollaire. Lorsque le champ de mouvement est limité par une *région de stabilité*, on doit, pour $E = E_\infty$, avoir nécessairement

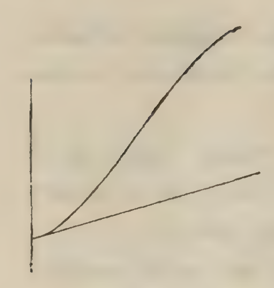
$$C^2 < \varphi\,(\infty),$$



puisque $C^2 \geqq \varphi\,(\infty)$ exclut tout mouvement à très grande distance du centre. Ceci s'accorde avec (*R. G.* § 18).

Mais si, à distance infinie, il y a une *région d'instabilité*, il faudra que, pour $E = E_\infty$, on ait

$$C^2 \leqq \varphi\,(\infty)$$



puisque $C^2 > \varphi(\infty)$ exclut le mouvement à très grande distance. Ceci s'accorde avec (*R. G.* § 43).

8. Propriétés de la droite aréolaire.

La droite aréolaire fait avec l'axe des abscisses un angle φ dont la tangente est égale à $\frac{1}{2} C^2$, tandis qu'elle coupe l'axe des ordonnées en un point situé à la distance $U_0 - \frac{1}{2} v_0^2$ de l'origine des coordonnées.

Il en résulte que:

1°. *Un déplacement de la droite aréolaire, tel que cette droite reste parallèle à elle-même, fera connaître toutes les trajectoires décrites avec la même vitesse aréolaire.*

Si le déplacement de la droite aréolaire s'effectue de manière que son intersection avec l'axe des ordonnées se déplace dans la direction négative de celui-ci, l'énergie du mouvement correspondant du point s'accroîtra.

2°. *Une rotation de la droite aréolaire autour d'un point de l'axe des ordonnées fera connaître toutes les trajectoires décrites avec la même énergie.*

9. En tout point où la droite aréolaire coupe la courbe potentielle on a $r' = 0$, mais $\frac{1}{2} C^2 \gtrless \frac{1}{2} F r^3$ ou, à cause de $\frac{C^2 - F r^3}{r^3} = r''$ (*R. G.* § 2, formule (41)), $r'' \gtrless 0$.

Un pareil point d'intersection donne donc une distance où la trajectoire possède un apocentre ou un péricentre, puisque le calcul a appris qu'une semblable distance est toujours atteinte par le point mobile.

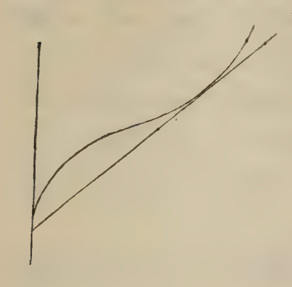
Nous trouvons donc que:

Tout point d'intersection de la droite aréolaire et de la courbe potentielle donne un apocentre ou un péricentre de la trajectoire; un APOCENTRE *lorsque la courbe potentielle se continue* AU-DESSUS *de la droite aréolaire, un* PÉRICENTRE *lorsqu'elle se continue* AU-DESSOUS.

10. En tout point où la droite aréolaire touche la courbe

potentielle, on a non seulement $r' = 0$, mais aussi $r'' = 0$.

Lorsqu'un pareil point de contact se trouve dans une région de stabilité, le mouvement, à la distance indiquée par le point de contact, ne peut être que circulaire.



Lorsque, au contraire, le point de contact est situé dans une région d'instabilité, la *possibilité* existe que le point mobile abandonne l'orbite circulaire.

Pour étudier ce cas de plus près, nous mettrons la fonction $C^2 - \varphi(r)$, qui pour $r = r_0$ est nulle, sous la forme suivante :

$$C^2 - \varphi(r) = A\, r^3\, \varrho\, (r - r_0)^{\varepsilon} + \text{termes d'ordre supérieur de } (r - r_0).$$

A représente une constante, et ϱ une fonction de r qui, tant sur l'orbite circulaire que très peu en dehors de cette orbite, a des valeurs positives finies. L'exposant ε est arbitraire, à cela près qu'il doit être plus grand que 0 et fournir pour $\varphi(r)$, par conséquent aussi pour F, une valeur réelle lorsque $r < r_0$.

Si ε est, par exemple, une fraction à numérateur et dénominateur impairs, l'orbite circulaire se trouve dans une région de stabilité pour $A < 0$, dans une région d'instabilité pour $A > 0$; mais si le numérateur est *pair*, le dénominateur par conséquent impair, l'orbite circulaire forme la limite entre une *région de stabilité* et une *région d'instabilité*, la seconde étant située à l'extérieur pour $A > 0$, à l'intérieur pour $A < 0$.

Dans l'hypothèse faite au sujet de $C^2 - \varphi(r)$, l'équation

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, d\, r$$

donne :

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = A_1\, \varrho_1\, (r - r_0)^{\varepsilon+1} + \ldots,$$

d'où il ressort de nouveau que pour $A < 0$ le mouvement est impossible en dehors de l'orbite circulaire.

On a ensuite :

$$r' = \pm \lambda (r - r_0)^{\frac{\varepsilon + 1}{2}} + \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

où λ est un facteur variable.

En intégrant cette équation, il vient

$$t - t_0 = \lambda_1 (r - r_0)^{\frac{1 - \varepsilon}{2}} + \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

lorsque ε diffère de 1; mais

$$t - t_0 = \lambda_1 \, l (r - r_0) + \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

pour $\varepsilon = 1$.

On voit que pour $\varepsilon \geqq 1$ la seule solution possible est $r = r_0$, mais que pour $\varepsilon < 1$ la supposition $r = r_0$ est *exclue.* Celle-ci est une solution *singulière* de l'équation du mouvement, ce qui ressort tant de la solution générale (b) que de l'équation différentielle (a).

D'après (b), en effet, $\frac{d r}{d t_0}$ est, au signe près, égal à $\frac{d r}{d t}$, de sorte qu'on a

$$\frac{d r}{d t_0} = \mp \lambda (r - r_0)^{\frac{\varepsilon + 1}{2}} + \ldots .$$

Cette expression de $\frac{d r}{d t_0}$ étant nulle pour $r = r_0$, la solution $r = r_0$ sera une solution *singulière.*

L'équation (a) conduit au même résultat. Elle donne

$$\frac{d r'}{d r} = \frac{r''}{r'} = \pm \mu (r - r_0)^{\frac{\varepsilon - 1}{2}} + \ldots ,$$

expression qui pour $r = r_0$ prend une valeur infiniment grande, lorsque $\varepsilon < 1$ (Comp.: Boole, *A Treatise on Differential Equations*, Chap. VIII, art. 11).

Dans le cas dont nous venons de nous occuper, la trajectoire décrite par le point mobile doit avoir un contact d'ordre

supérieur avec l'orbite circulaire. Tandis que pour la solution *singulière* $r = r_0$ toutes les dérivées $r^{(n)}$ de r par rapport au temps sont nulles, il n'en pourra être de même de toutes les dérivées telles qu'on les obtient en différentiant les équations du mouvement, lorsque dans ces dérivées on posera $r = r_0$. Si, parmi celles-ci, $r_0^{(n)}$ est la première qui ne devienne pas nulle, le contact sera de l'ordre $(n - 1)$.

Puisque

$$r^{(n)} = \frac{d\, r^{(n-1)}}{dr} \cdot r',$$

l'exposant de la plus basse puissance de $(r - r_0)$ sera à chaque dérivée suivante diminué de 1 mais augmenté de $\frac{\varepsilon + 1}{2}$, donc, en somme, diminué de $\frac{1 - \varepsilon}{2}$. Pour r'' cet exposant est ε, donc pour $r^{(n)}$: $\varepsilon - (n - 2)\frac{1 - \varepsilon}{2}$ ou $\frac{n}{2}\varepsilon - \frac{n - 2}{2}$. Il résulte de là:

$$r_0^{(n)} = \begin{matrix} 0 \\ \text{fini} \\ \infty \end{matrix} \text{ pour } \varepsilon \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n - 2}{n},$$

$$r_0^{(n+1)} = \begin{matrix} 0 \\ \text{fini} \\ \infty \end{matrix} \text{ pour } \varepsilon \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n - 1}{n + 1},$$

de sorte que le contact sera du n^{e} ordre si ε satisfait à l'inégalité

$$\frac{n - 2}{n} < \varepsilon \leqq \frac{n - 1}{n + 1},$$

qui peut s'écrire de la manière suivante:

$$n < \frac{2}{1 - \varepsilon} \leqq n + 1$$

où $(1 - \varepsilon)$ représente le degré d'infinité de $-\varphi'(r_0)$.

Si l'on a donc $-\varphi'(r_0) = \infty$, le point mobile abandonnera immédiatement l'orbite circulaire; quant à savoir s'il se portera en dehors ou en dedans de celle-ci, la question reste

indécise; les deux directions sont également possibles, quel que soit l'ordre du contact. Si, toutefois, l'orbite circulaire forme la limite entre une région de stabilité et une région d'instabilité, le mouvement aura lieu dans cette dernière.

Il en est autrement lorsque le point, durant son mouvement, arrive sur l'orbite circulaire dans l'état $r' = 0$ et $r'' = 0$. Tel sera le cas si la vitesse aréolaire et l'énergie du mouvement sont égales aux mêmes grandeurs prises à l'origine du mouvement sur le cercle. Le contact est-il d'ordre *pair*, le point *franchira* l'orbite circulaire; est-il d'ordre *impair*, le point rebroussera chemin, après avoir atteint l'orbite circulaire. Celle-ci est alors l'*enveloppe* de toutes les trajectoires que le point peut décrire sous la même loi d'action de la force.

Les résultats obtenus se laissent énoncer de la manière suivante, en désignant par (C, r_0) une orbite circulaire de rayon r_0, sur laquelle le point mobile est poussé avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}C$.

Lorsque l'orbite circulaire (C, r_0) *se trouve dans une région de stabilité, elle est la seule trajectoire possible.*

Se trouve-t-elle dans une région d'instabilité, il en est encore de même si $-\varphi'(r_0)$ *a une valeur finie. Mais si* $-\varphi'(r_0)$ *est un infiniment grand de l'ordre* η, *l'orbite circulaire ne sera pas décrite. La trajectoire du point aura avec l'orbite circulaire un contact, dont l'ordre est indiqué par le plus grand nombre entier inférieur à* $\frac{2}{\eta}$ [1]).

Pour tout mouvement circulaire, nous trouvons que:

La vitesse aréolaire $\frac{1}{2}C$, *avec laquelle le mouvement s'effectue à une certaine distance, est déterminée par l'angle* $\varphi = Arc.\ Tg. \frac{1}{2}C^2$ *que la tangente au point correspondant de la courbe potentielle fait avec l'axe des abscisses.*

11. La distance du point de contact à la droite menée

---

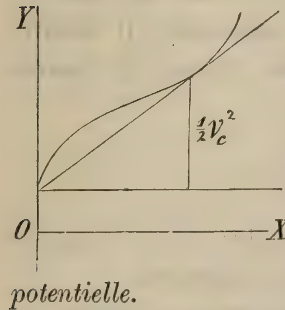
1) Ce résultat se trouvait aussi dans le Mémoire, tel que je l'ai présenté à l'Académie royale des sciences; mais il y était établi d'une autre manière.

parallèlement à l'axe des abscisses par le point où la tangente coupe l'axe des ordonnées, est donné par l'équation

$$x \times \tfrac{1}{2} F r^3 = \tfrac{1}{2} F r = \tfrac{1}{2} v_c{}^2,$$

si v_c représente la vitesse du mouvement circulaire.

Par conséquent:

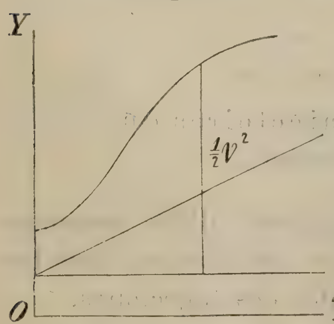


Le demi-carré de la vitesse avec laquelle le mouvement circulaire a lieu à une certaine distance, est donné par la distance du point correspondant de la courbe potentielle à la droite tracée, parallèlement à l'axe des abscisses, par l'intersection de l'axe des ordonnées et de la tangente à la courbe potentielle.

12. La distance d'un point de la courbe potentielle à la droite menée parallèlement à l'axe des abscisses par le point où la droite aréolaire coupe l'axe des ordonnées, est donnée par l'équation:

$$U - (U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2) = \tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_r^{r_0} F\, d r = \tfrac{1}{2} v^2 \quad [1]).$$

Par conséquent:

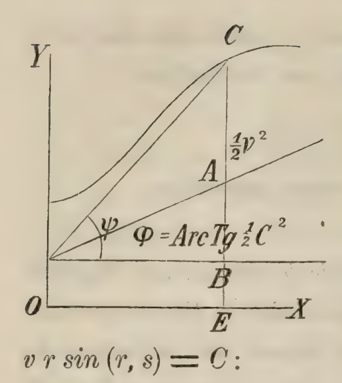


Le demi-carré de la vitesse avec laquelle le mouvement a lieu à une certaine distance, est donné par la distance du point correspondant de la courbe potentielle à la droite menée, parallèlement à l'axe des abscisses, par l'intersection de la droite aréolaire et de l'axe des ordonnées.

13. *L'angle ψ, que fait avec l'axe des abscisses la droite qui joint un point de la courbe potentielle au point d'intersection*

---

1) Peirce, § 712.



de la droite aréolaire et de l'axe des ordonnées, est déterminé par l'équation

$$tg\,\psi = \frac{\frac{1}{2}v^2}{x} = \tfrac{1}{2}v^2 r^2.$$

14. Si (r, s) est l'angle que le rayon vecteur du point mobile fait avec la tangente à la trajectoire, il résulte du principe des aires, à savoir $v\, r \sin(r, s) = C$:

$$\sin^2(r, s) = \frac{C^2}{v^2 r^2} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\psi} \text{ [1]}.$$

où ψ est l'angle désigné au § 13, et $\varphi = Arc.\ Tg.\ \frac{1}{2}C^2$ l'angle que la droite aréolaire fait avec l'axe des abscisses.

15. Si ϱ est le rayon de courbure de la trajectoire, il résulte de $\frac{v^2}{\varrho} = F \sin(r, s)$:

$$\frac{\varrho \sin(r, s)}{r} = \frac{v^2}{F r} = \frac{v^2}{v_c^2} \text{ [2]}.$$

Par conséquent: *la projection du rayon de courbure de la trajectoire sur le rayon vecteur est à ce rayon vecteur lui-même comme le carré de la vitesse à celui de la vitesse circulaire.*

III. Propriétés des trajectoires du mouvement central.

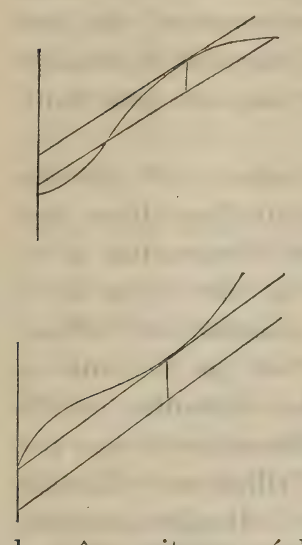
16. A l'aide des propriétés qui viennent d'être reconnues à la courbe potentielle et à la ligne aréolaire, on peut lire sur une figure les propriétés suivantes des trajectoires.

---

[1]) M. Peirce donne $\sin^2(r, s) = \frac{AB}{BC}$.

[2]) M. Peirce donne, § 712, une expression un peu différente pour le rayon vecteur.

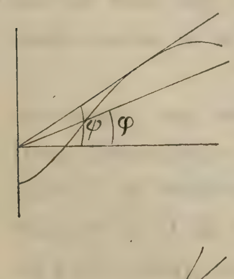
a. *Chaque orbite circulaire dans une région* $\begin{matrix}\textit{de stabilité}\\ \textit{d'instabilité}\end{matrix}$ *coupe toutes les trajectoires qui, dans cette région, sont décrites avec la même vitesse aréolaire qu'elle, mais avec une plus grande énergie.*



Au point d'intersection, la vitesse radiale est $\begin{matrix}\textit{maxima}\\ \textit{minima}\end{matrix}$ $\left(R.\ G. \frac{\S\,12 \text{ et } \S\,19}{\S\,29}\right)$.

S'il résulte de là (*R. G.* § 19) que toutes les trajectoires décrites avec la même vitesse aréolaire suivant la loi d'action $\mu\, r^{-2}$ ont des paramètres égaux, la même propriété, appliquée à la loi d'action $\mu\, r$, nous apprend que toutes les ellipses décrites avec la même vitesse aréolaire ont une aire égale. En effet, a et b étant les demi-axes de l'ellipse, la vitesse radiale est maxima lorsque le rayon vecteur est egal à $\sqrt{a\, b}$. Les temps de révolution sont donc pareillement égaux.

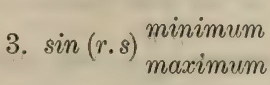
b. *Chaque orbite circulaire dans une région* $\begin{matrix}\textit{de stabilité}\\ \textit{d'instabilité}\end{matrix}$ *coupe toutes les trajectoires qui, dans cette région, sont décrites avec la même énergie qu'elle, mais avec une vitesse aréolaire plus petite.*



Au point d'intersection, on a:

1. $v = v_c$.

2. $v\, r \begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}$



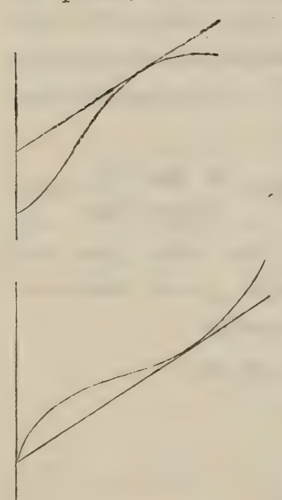
3. $\sin (r . s) \begin{matrix}\textit{minimum}\\ \textit{maximum}\end{matrix}$

4. *La projection du rayon de courbure de la trajectoire sur le rayon vecteur est égale au rayon vecteur.*

Les théorèmes 1, 2 et 3 correspondent aux théorèmes II

et III de M. Korteweg, qui en déduisit que toutes les orbites elliptiques, décrites avec la même énergie sous l'action d'une force μr^{-2}, ont des axes égaux; si, au contraire, elles sont décrites sous l'action de la force μr, la diagonale du rectangle construit sur les axes aura la même longueur pour toutes les ellipses.

Le théorème 4, appliqué à la loi d'action μr^{-2}, fait connaître que le centre de courbure du point d'une ellipse, situé à l'une des extrémités du petit axe, est l'intersection de cet axe avec la perpendiculaire élevée d'un des foyers sur la droite qui joint ce foyer au point considéré de l'ellipse. Appliqué à la loi d'action μr, il fait voir que le centre de courbure d'un point, situé à l'une des extrémités des diamètres conjugués égaux, se trouve à l'intersection de deux perpendiculaires, l'une élevée du centre de l'ellipse sur le diamètre du point, l'autre abaissée du point sur le diamètre conjugué.



c. Dans une région de stabilité le mouvement ne peut jamais devenir circulaire.

Dans une région d'instabilité, chaque orbite circulaire sera cercle asymptotique intérieur ou extérieur pour toutes les trajectoires, dans cette région, qui sont décrites avec la même énergie et la même vitesse aréolaire qu'elle [1]).

Il ressort de la figure que, dans une région d'instabilité, le point mobile peut des deux côtés s'approcher de l'orbite circulaire, et le calcul (*R. G.* § 28 et 29) a fait voir qu'il a besoin pour cela d'un temps infini, sauf lorsque $\frac{d F r^3}{d r}$ est infiniment grand sur l'orbite circulaire, cas où le point atteindra cette orbite. A ce moment, on a $r' = 0$, $r'' = 0$, $\sin(r, s) = 1$ et le rayon de

1) Pour le cas de $\frac{dF}{dr} = \infty$ sur l'orbite circulaire, voir § 10.

courbure de la trajectoire égal au rayon du cercle, de sorte que ce dernier est le cercle de courbure de la trajectoire à l'endroit où le point mobile arrive sur l'orbite circulaire. A ce moment, le point a donc un mouvement semblable sous tous les rapports au mouvement circulaire, et c'est à cause de cela qu'il a été dit (*R. G.* § 28) que le point décrira désormais l'orbite circulaire [1]).

On peut encore remarquer que pour $\frac{d\,F\,r^3}{d\,r} = -\infty$ la courbe potentielle aura, au point correspondant, une courbure infiniment grande.

Puisqu'en un point d'inflexion la courbure est nulle, *une orbite circulaire située à la limite d'une région de stabilité et d'une région d'instabilité sera cercle asymptotique de toutes les trajectoires, dans la région d'instabilité, qui sont décrites avec la même vitesse aréolaire et la même énergie que l'orbite circulaire.*

d. Une légère perturbation d'un mouvement circulaire, dans une région de stabilité, donnera lieu à un mouvement nouveau suivant une trajectoire régulièrement ondulée, dont les péricentres et les apocentres s'écarteront très peu de l'orbite circulaire primitive (*R.G.* § 20).

Si la perturbation consiste seulement en une $\frac{\textit{augmentation}}{\textit{diminution}}$ de la vitesse tangentielle, les $\frac{\textit{péricentres}}{\textit{apocentres}}$ de la nouvelle trajectoire seront situés sur l'orbite circulaire primitive.

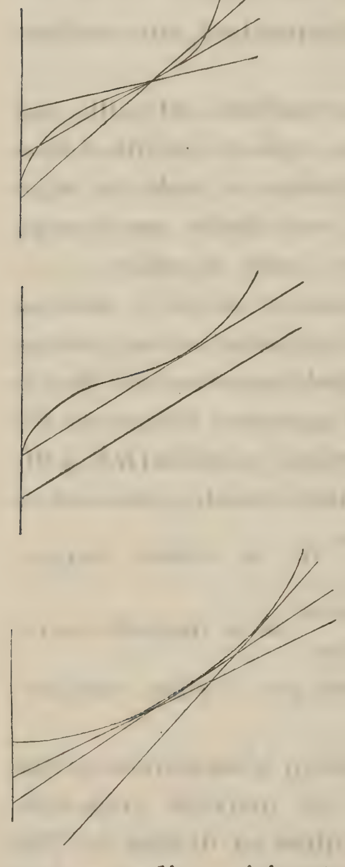
Si la perturbation n'occasionne qu'une vitesse radiale, la nouvelle trajectoire aura ses péricentres en dedans de l'orbite circulaire primitive, ses apocentres à peu près à la même distance en dehors.

[1]) Voir toutefois, pour ce cas, le § 10.

[2]) Korteweg, *l. c.*, Théorème VI, corollaire *a*.

Si la perturbation donne lieu tant à un changement de la vitesse tangentielle qu'à une vitesse radiale, la nouvelle trajectoire coupera régulièrement l'orbite circulaire.

e. Une légère perturbation d'un mouvement circulaire, dans une région d'instabilité, produira un mouvement nouveau sur une trajectoire qui, soit du côté intérieur, soit du côté extérieur, soit des deux côtés, s'éloignera jusqu'à une distance finie de l'orbite circulaire (*R. G.* § 24) [1]).



Si la perturbation ne donne qu'une *augmentation*/*diminution* de la vitesse tangentielle, la nouvelle trajectoire aura un *péricentre*/*apocentre* sur l'orbite circulaire, et quittera la région du côté *extérieur*/*intérieur*, ou s'étendra jusque *à l'infini*/*au centre*, si tel est le cas pour la région elle-même.

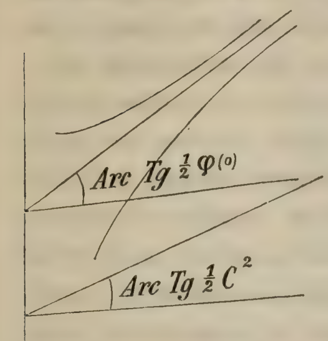
Si la perturbation ne donne qu'une vitesse radiale, la nouvelle trajectoire ne pourra pas avoir d'apocentre ni de péricentre dans la région d'instabilité.

Enfin, la perturbation est-elle tout à fait quelconque, la nouvelle trajectoire, outre les formes des cas précédents, pourra encore avoir un cercle asymptotique intérieur ou extérieur à la place d'un apocentre ou d'un péricentre.

f. Une perturbation d'un mouvement circulaire, à la limite d'une

1) Ce theorème et le précédent correspondent au théorème IV de M. Korteweg.

région de stabilité et d'une région d'instabilité, donnera un mouvement nouveau sur une trajectoire qui aura toujours un apocentre ou un péricentre, mais qui pourra aussi avoir l'un et l'autre, ou bien l'un des deux avec un cercle asymptotique,



g. Pour la spirale qui conduit au centre, on a

$$lim\ sin^2\ (r, s) = \frac{C^2}{\varphi(0)} \quad ^{1)}$$

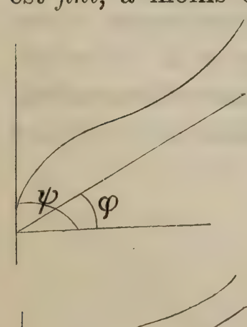
$$lim\ \varrho = 0.$$

Eu égard à (*R. G.* § 52), nous trouvons:

Une spirale qui conduit au centre par un nombre *fini* de circonvolutions (donc pour $\varphi(0) = \infty$) arrivera à ce centre dans la direction du rayon vecteur.

Une spirale qui conduit au centre par un nombre *infini* de circonvolutions (donc pour $0 < \varphi(0) < \infty$) arrivera à ce centre en faisant avec le rayon vecteur un angle aigu si $C^2 < \varphi(0)$, un angle droit si $C^2 = \varphi(0)$.

Le temps mis à parcourir la spirale qui conduit au centre est *fini*, à moins que le centre ne soit entouré d'une région d'instabilité, qu'on n'ait $E = E_0$ (donc $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$) et qu'on n'ait en outre $\varphi'''(0) = 0$, auquel cas le point mobile s'approchera asymptotiquement du centre (*R. G.* § 35).

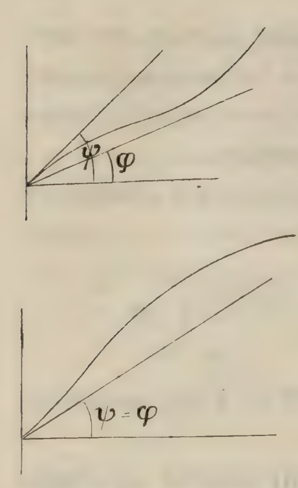


h. La branche qui conduit à l'espace infini présente les propriétés suivantes:

Si $E > E_\infty$, et que par conséquent la branche soit de forme hyperbolique (*R.G.* § 52), on a $lim\ sin\ (r, s) = 0$.

Si $E = E_\infty$, on a $lim\ sin^2\ (r, s) = \frac{C^2}{\varphi(\infty)}$.

1) Korteweg, *l,c.*, théorèmes X^a, X^b, X^c, X^d.

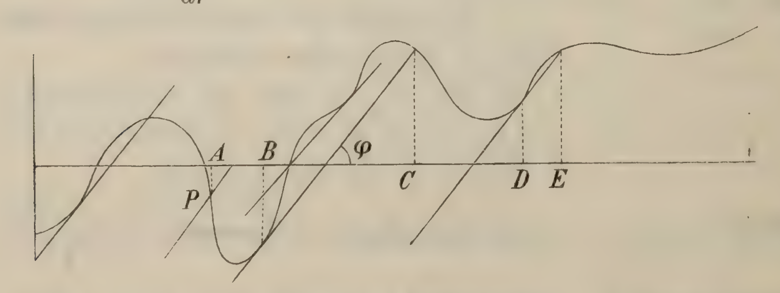


Donc, si $\varphi(\infty) = \infty$, et que par conséquent la branche soit de forme parabolique (*R. G.* § 52), on a *lim sin* $(r, s) = 0$.

Mais si $\varphi(\infty) < \infty$, et que par conséquent la branche soit une spirale d'un nombre infini de circonvolutions (*R.G.* § 52), celle-ci conduit au centre en faisant avec le rayon vecteur un angle aigu. C'est seulement lorsque le champ du mouvement se termine dans une région d'instabilité, qu'on peut avoir $C^2 = \varphi(\infty)$, auquel cas *lim sin* $(r, s) = 1$.

Les figures montrent, en outre, que les branches de forme hyperbolique ou parabolique ont une inclinaison de plus en plus forte à mesure qu'elles s'éloignent vers l'infini, et qu'il en est de même de la branche spirale située dans une *région de stabilité*; tandis que, dans une *région d'instabilité*, une pareille branche sera moins inclinée à grande qu'à petite distance.

k. Si l'on mène aux parties de la courbe potentielle qui tournent leur côté concave vers l'axe positif des ordonnées toutes les tangentes faisant avec l'axe des abscisses un angle $\varphi = Arc\ Tg\ \frac{1}{2} C^2$, les points de contact détermineront toutes les distances où le mouvement circulaire avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2} C$ est possible. Ces distances sont naturellement données par celles des racines positives de l'équation $Fr^3 - C^2 = 0$ qui rendent $\frac{d\,F^3}{dr} < 0$.



Si la courbe de la figure ci-dessus représente la potentielle

pour une certaine loi d'action de la force, on pourra, d'un point dont la distance au centre est indiquée par le point A, faire partir, avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}C$, deux trajectoires à cercle asymptotique intérieur, mais pas de trajectoire à cercle asymptotique extérieur.

La figure montre, en outre, comment la trajectoire du point mobile est modifiée lorsque l'énergie du mouvement, à vitesse aréolaire constante, augmente peu à peu.

Si l'énergie est au minimum, et le mouvement par conséquent normal au rayon vecteur du point, le péricentre de la trajectoire se trouve en A. L'énergie du mouvement augmente-t-elle, le péricentre prendra successivement toutes les distances depuis A jusqu'au point B, où est situé le premier cercle intérieur; de là, il sautera brusquement en C, de sorte que sur $B\,C$ il ne pourra pas y avoir de péricentre; puis il se déplacera le long de $C\,D$, atteindra en D le second cercle asymptotique, et ensuite sautera de nouveau brusquement jusqu'en E, d'où il continuera à s'éloigner peu à peu du centre. Dans tous les cas, la trajectoire conduira à l'infini par une branche de forme hyperbolique [1]).

De l'inspection de la figure ressort la proposition suivante:

Le nombre des trajectoires à cercle asymptotique $\dfrac{\textit{intérieur}}{\textit{extérieur}}$, *qui, décrites avec une vitesse aréolaire constante, peuvent partir d'un point, est égal au nombre des mouvements circulaires qui dans une région d'instabilité ont lieu avec la même vitesse aréolaire, mais, en comptant du point vers* $\dfrac{\textit{le centre}}{\textit{l'infini}}$, *avec une énergie de plus en plus grande.*

Comme, d'après (*R. G.* § 47, form. 14)), l'expression

$$\int_r^{r_x} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}$$

[1]) Comp. § 4 du Mémoire de M. Korteweg.

représente l'excès de l'énergie du mouvement circulaire qui s'exécute à la distance r_x avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}C$, sur l'énergie du point lorsqu'il se meut à la distance r avec la même vitesse aréolaire et normalement à son rayon vecteur, la proposition ci-dessus fournit le caractère analytique suivant:

Dans l'intégrale

$$\int_{r_1}^{\varrho} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3}$$

prenez successivement pour ϱ, *rangées suivant leur grandeur de* r_1 *jusque* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{au centre}}{\textit{à l'infini}}$, *celles des racines de l'équation* $Fr^3 - C^2 = 0$ *qui rendent* $\frac{d\,Fr^3}{d\,r} < 0$; *de toutes les valeurs que l'intégrale acquiert ainsi, déterminez celles qui forment une série croissante de valeurs positives. Le nombre des termes de cette série sera égal au nombre des trajectoires à cercle asymptotique* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{intérieur}}{\textit{extérieur}}$, *qui peuvent partir avec la vitesse aréolaire* $\frac{1}{2}C$ *d'un point situé à la distance* r_1.

La figure montre, en outre, qu'il peut y avoir des trajectoires possédant à la fois un cercle asymptotique intérieur et un cercle asymptotique extérieur.

Si une droite, en effet, touche deux parties de la courbe potentielle qui ont leur concavité tournée vers l'axe positif des ordonnées, et que la partie comprise entre les deux points de contact soit située *tout entière au-dessus* de la tangente, celle-ci donnera, aux points de contact, les distances où se trouvent les orbites circulaires dont s'approchera asymptotiquement le point qui se meut entre elles avec une vitesse aréolaire et une énergie égales à celles de chacun de ces deux mouvements circulaires.

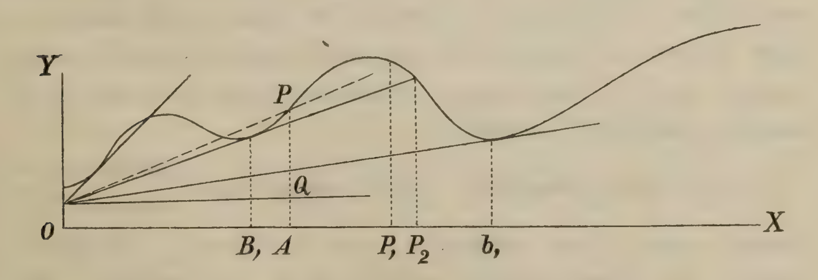
Le caractère analytique de l'existence de pareilles trajectoires consiste en ce que, dans l'intégrale

$$\int_{r_1}^{\varrho} \frac{F r^3 - C^2}{r^3}$$

on peut choisir pour ϱ deux racines de l'équation $Fr^3 - C^2 = 0$, l'une plus grande et l'autre plus petite que r_1, qui rendent $\frac{d\,F r^3}{d\,r} < 0$ et donnent en même temps à l'intégrale des valeurs positives et égales.

Le nombre des couples de semblables racines fait connaître le nombre des trajectoires qui, d'un point situé à la distance r du centre, peuvent partir avec la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}\,C$ et s'approcher asymptotiquement, aussi bien dans la direction du centre que dans celle de l'infini, d'une orbite circulaire.

l. Si d'un point de l'axe des ordonnées on mène, sous un angle aigu avec cet axe, toutes les droites qui touchent la courbe potentielle en des parties ayant leur concavité tournée vers l'axe positif des ordonnées, les points de contact donneront les distances où les mouvements circulaires s'exécutent avec la même énergie.



La courbe ci-dessus représentant la potentielle pour une certaine loi d'action de la force, il pourra partir d'un lieu indiqué par A, avec une vitesse $\sqrt{2\,\overline{PQ}}$, une trajectoire à cercle asymptotique intérieur et une trajectoire à cercle asymptotique extérieur.

Ici encore, nous voyons comment la situation et la grandeur de la trajectoire sont modifiées avec la vitesse aréolaire du

mouvement. Lorsque celle-ci est au maximum, la trajectoire a un péricentre en P_1, un apocentre en A. La vitesse aréolaire diminue-t-elle peu à peu, le péricentre se déplacera de la distance $P P_2$ et l'apocentre, simultanément, de la distance $A B_1$, tandis qu'en B_1 se trouve le cercle asymptotique extérieur. La vitesse aréolaire décroît-elle encore plus, la trajectoire cessera d'avoir un apocentre, tandis que le péricentre se portera de P_2 en b, où est situé le cercle asymptotique intérieur. Pour une vitesse aréolaire encore plus petite, la trajectoire perd aussi son péricentre.

De la figure ressort la vérité de la proposition suivante:

Le nombre des trajectoires à cercle asymptotique $\frac{\textit{intérieur}}{\textit{extérieur}}$, *qui, décrites avec une énergie constante, peuvent partir d'un point, est égal au nombre des mouvements circulaires qui dans une région d'instabilité ont lieu avec la même énergie, mais, en comptant du point jusque* $\frac{\textit{au centre}}{\textit{à l'infini}}$, *avec une vitesse aréolaire de plus en plus petite.*

Comme, d'après b, sur les orbites circulaires situées dans une région d'instabilité, le produit $v r$ a une valeur minimum pour toutes les trajectoires qui sont décrites avec la même énergie que le mouvement circulaire, nous trouvons le caractère analytique suivant:

Le nombre des trajectoires à cercle asymptotique $\frac{\textit{intérieur}}{\textit{extérieur}}$, *qui peuvent partir d'une distance* r_1 *avec la vitesse* v_1, *est égal au nombre des valeurs minima, prises par* vr, *qui sont plus petites que* $v_1 r_1$ *et qui, comptées de la distance* r_1 *jusque* $\frac{\textit{au centre}}{\textit{à l'infini}}$ *forment une série décroissante de valeurs positives* [1]).

Ici encore on trouve que tout couple de valeurs minima *égales*, qui se rencontrent dans les deux séries, indique une trajectoire à cercles asymptotiques *intérieur* et *extérieur*.

---

[1]) Korteweg, *l.c*, théorème VII.

m. De *k* on déduit, en ayant égard aux § 6 et 7, la règle suivante:

Règle pour la forme des trajectoires décrites avec une vitesse aréolaire constante $\frac{1}{2}$ *C.*

Déterminez les racines positives de l'équation $F r^3 - C^2 = 0$. *Ces racines donnent les seules distances où soit possible le mouvement circulaire uniforme avec la vitesse* $\frac{1}{2} C$ [1]).

Décrivez, dans le plan du mouvement, les orbites circulaires sur lesquelles on a $\frac{d F r^3}{d r} < 0$.

Le point mobile ne pourra franchir aucune de ces orbites circulaires, à moins que son énergie totale ne surpasse celle du mouvement circulaire correspondant. Si elle y est égale, le point s'approche asymptotiquement de ce cercle; si elle est plus petite, il rebrousse chemin avant d'avoir atteint le cercle. Lors même que le point, dans la direction du centre ou de l'infini, ne trouve sur son chemin aucune orbite circulaire, sa trajectoire ne conduira pas jusqu'au centre ou jusqu'à l'infini, si son énergie est inférieure, dans le premier cas, à celle de la force $C^2 r^{-3}$, *dans le second, à celle de la force motrice* [1]).

n. De même il suit de *l*, en ayant égard aux §§ 6 et 7, une *règle pour la forme des trajectoires décrites avec la même énergie.*

Remplace-t-on les orbites circulaires considérées dans la règle précédente par celles qui sont décrites avec une énergie égale et dont les rayons sont donnés par les racines de l'équation

$$\frac{1}{2} F r + \int_{r_1}^{r} F d r = \frac{1}{2} v_1^2,$$

v_1 étant la vitesse constante avec laquelle le mouvement à

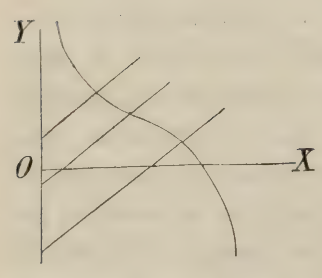
---

[1]) Voir § 10 pour le cas où $\frac{dF}{dr}$ est ∞ sur l'orbite circulaire.

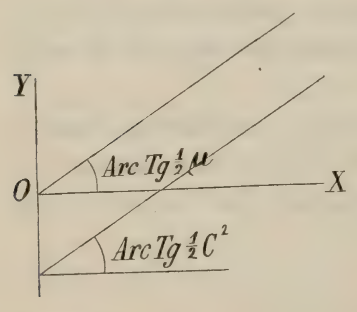
Cette règle est conforme à (*R.G.* § 51).

lieu à la distance r_1, alors aucune de ces dernières orbites circulaires ne pourra être franchie par le point, si la vitesse aréolaire de son mouvement est plus grande que celle du mouvement circulaire correspondant. Si elle y est égale, l'orbite circulaire sera cercle asymptotique; si elle est moindre, l'orbite sera franchie. Quant au reste, la règle doit être identique à la précédente.

IV. Applications.



a. Si le champ entier du mouvement est une *région de répulsion*, et que par conséquent la courbe potentielle s'abaisse pour des abscisses croissantes, la trajectoire a toujours un péricentre et une branche hyperbolique. Puisque ϱ *sin* (r, s) est ici négatif, la convexité de la trajectoire sera tournée vers le centre (*R. G.* § 9).



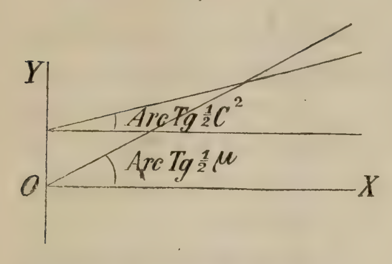
b. Si le champ entier du mouvement est une *région de la raison inverse du cube*, que par conséquent la force motrice soit de la forme μr^{-3} et la courbe potentielle une droite faisant avec l'axe des abscisses un angle *Arc. Tg* $\frac{1}{2}\mu$ et passant par l'origine des coordonnées, la figure donne:

Pour $C^2 = \mu$:

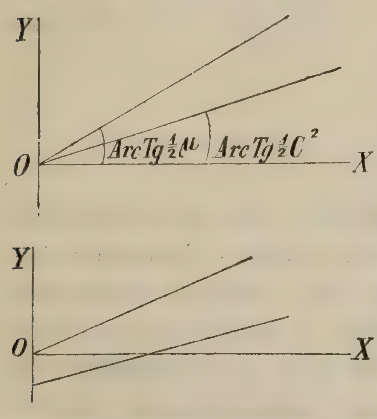
$E = E_0 = E_\infty$: Partout mouvement circulaire uniforme.

$E > E_0 = E_\infty$: ${}^\infty S_c - H_y$, la trajectoire devient de moins en moins inclinée à mesure qu'elle s'approche du centre, et est, au centre même, normale au rayon vecteur. La vitesse radiale est constante.

Pour $C^2 < \mu$:



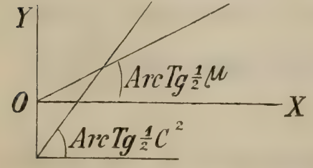
$E < E_\infty = E_0$: ${}^\infty S_c - A$, la trajectoire devient, à partir de l'apocentre, de plus en plus inclinée ; au centre on a $lim\ sin^2 (r, s) = \frac{C^2}{\mu}$. De plus, $v_c^2 - v^2$ est constant, et la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est toujours plus petite que ce rayon vecteur.



$E = E_\infty = E_0$: ${}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$, tout le long de la trajectoire on a $v_c = v$ et vr constant ; la trajectoire a partout la même inclinaison, et est par conséquent une spirale logarithmique. Le rayon de courbure de la trajectoire est $\frac{\mu}{C^2}\, r$.

$E > E_\infty = E_0$: $S_c - H_y$, la trajectoire devient de moins en moins inclinée en approchant du centre, et au centre même on a $lim\ sin^2 (r, s) = \frac{C^2}{\mu}$. De plus, $v^2 - v_c^2 = v_\infty^2$, de sorte que la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est toujours plus grande que le rayon vecteur.

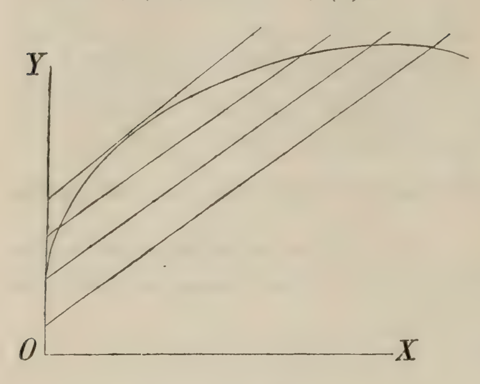
Enfin, pour $C^2 > \mu$, on doit avoir $E > E_\infty$, et la trajectoire est $P - H_y$.



Les résultats communiqués antérieurement (*R. G.* § 46, tableau *B*) sont conformes à ceux qui viennent d'être obtenus.

c. Si le champ entier du mouvement est une *région de stabilité*, la courbe potentielle tourne partout sa convexité vers l'axe positif des ordonnées. La figure donne maintenant :

Pour $\varphi(\infty) > C^2 > \varphi(0)$:



$E < E_\infty : P - A$, y compris le cercle.

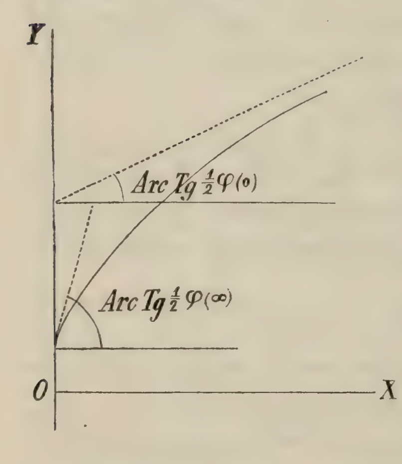
$E = E_\infty : P - {}^\infty S_\infty$, si l'on a $\varphi(\infty) < \infty$.

$P - P_{ar}$, si l'on a $\varphi(\infty) = \infty$.

A partir du péricentre, la trajectoire devient de plus en plus inclinée; *lim sin*² (r, s) est, pour $r = \infty$, égale à $\frac{C^2}{\varphi(\infty)}$.

$E > E_\infty : P - H_y$.

Pour $C^2 \leqq \varphi(0)$:



$E < E_\infty : {}^\infty S_c - A$, la trajectoire devient, depuis l'apocentre jusqu'à une certaine distance du centre, de plus en plus inclinée, après quoi son inclinaison diminue graduellement jusqu'au centre; au centre même, on a $\lim \sin^2 (r,s) = \frac{\varphi(0)}{C^2}$.

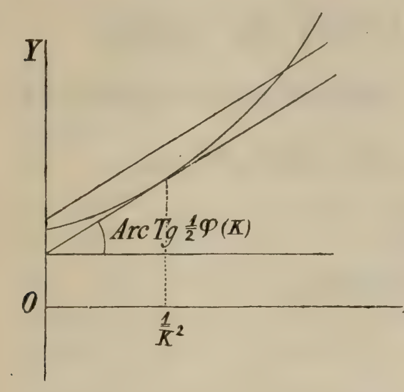
$E = E_\infty : {}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$ pour $\varphi(\infty) < \infty$, $\lim \sin^2 (r,s) = \frac{C^2}{\varphi(\infty)}$ à distance infinie; du côté du centre, la trajectoire devient de moins en moins inclinée et $\sin^2 (r, s)$ tend vers $\frac{C^2}{\varphi(0)}$.

${}^\infty S_c - P_{ar}$ pour $\varphi(\infty) = \infty$.

Enfin, pour $C^2 \geqq \varphi(\infty)$, on doit avoir $E > E_\infty$, et la trajectoire est $P - H_y$.

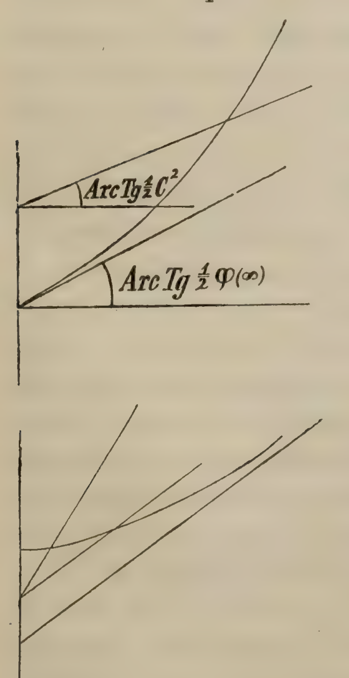
Les résultats (*R. G.* § 46, tabl. C) sont conformes à ceux qui viennent d'être trouvés.

d. Si le champ entier du mouvement est une *région d'instabilité*, la courbe potentielle tourne sa concavité vers l'axe positif des ordonnées. La figure donne alors:



Pour $\varphi(\infty) < C^2 (= \varphi(\varkappa)) < \varphi(0)$:

$E \leqq E_\infty$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - A$, la spirale devient de plus en plus inclinée en approchant du centre; au centre même, $\lim \sin^2 (r,s) = \frac{C^2}{\varphi(0)}$, de sorte que pour $\varphi(0) = \infty$ on a $\lim \sin(r,s) = 0$; c'est seulement dans ce cas que le nombre des circonvolutions de la spirale est *fini*.



$E_\varkappa > E > E_\infty$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - A$ et $P - H_y$.

$E = E_\varkappa$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - S_B$ et $S_b - H_y$.

$E = E_\varkappa$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - H_y$.

Pour $C^2 \leqq \varphi(\infty)$:

$E < E_\infty$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - A$.

$E = E_\infty$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - {}^{\infty}S_\infty$.

$E > E_\infty$: ${}^{\infty}\overset{e}{S}_c - H_y$.

Pour $C^2 > \varphi(0)$, on doit avoir $E > E_\infty$; la trajectoire est toujours $P - H_y$.

Pour $C^2 = \varphi(0)$, on doit également avoir $E > E_\infty$.

$E < E_0$: $P - H_y$.

$E \gtreqless E_0$: ${}^{\infty}S_c - H_y$.

Les résultats (*R. G.* § 46, tabl. D) concordent avec ceux qui viennent d'être trouvés. Comparez aussi : Peirce, § 708.

NOTES SUR CONSTANTIJN HUYGENS

CONSIDÉRÉ COMME AMATEUR DES SCIENCES EXACTES, ET SUR SES RELATIONS AVEC DESCARTES;

PAR

D. J. KORTEWEG.

Il est généralement connu que notre poète Constantijn Huygens, joignant à toutes ses autres éminentes qualités celle de prendre un vif intérêt aux sciences exactes, était en relation avec beaucoup de mathématiciens et de physiciens de son temps. Ainsi lorsque, jeune secrétaire d'ambassade, il visite en 1621 et 1622 l'Angleterre, on le voit entrer en commerce suivi avec Cornelis Drebbel, l'homme qui s'était acquis du crédit à la cour de Jaques Ier par les „nouveautés ingénieuses et secrets naturels" qu'il montrait aux courtisans; douze ou quinze ans plus tard, il est en correspondance avec Descartes et le père Mersenne, avec Diodati, l'ami de Galilée, avec Wendelinus, avec Golius et Hortensius, les représentants des mathématiques aux universités de Leide et d'Amsterdam, et nous trouvons des traces de rapports personnels avec le jeune van Schooten, plus tard l'ami et le maître de Christiaan Huygens, avec Pollotto, ingénieur militaire au service des Etats et mathématicien tenu en haute estime par Descartes, enfin avec Albert Girard [1]), au mérite duquel il rend hommage en recom-

---

[1]) Manuscrits conservés au Trippenhuis, à Amsterdam, n°. 45 (*Lettres*

mandant à Golius, qui venait d'être nommé professeur à Leide, de travailler de concert avec lui.

Sans doute, Constantijn Huygens n'a pas contribué, au moins *directement*, aux progrès des sciences exactes et naturelles; mais, quand il s'agit d'un personnage tel que lui, la question de savoir jusqu'où s'étendaient ses connaissances en ces matières, et de quelle nature étaient ses rapports avec les savants de l'époque, n'en est pas moins digne de tout notre intérêt, surtout si l'on considère que la prédilection de Constantijn a nécessairement eu de l'influence sur le développement de son fils Christiaan, et que sa liaison avec les hommes qui donnaient alors le ton dans le monde scientifique a mis de bonne heure en lumière le talent de ce fils et lui a valu les relations les plus précieuses.

La riche collection de manuscrits relatifs à la famille Huygens, qui est déposée au Trippenhuis et dont les registres et catalogues dressés par MM. Hooft, Boot et Jorissen ont rendu l'étude facile, nous offre plusieurs données [1]) pour résoudre la question ci-dessus indiquée, et c'est là qu'ont été puisés la plupart des détails qui seront communiqués dans les pages suivantes. La correspondance avec Descartes surtout

---

latines), lettre n°. 111, à Golius, du 19 déc. 1629: „*Aliquid mecum nuper circa theoriam istam* (la théorie de la réfraction de la lumière) *communicavit vir stupendus* Albertus Girardus'', etc. Dans le *Dagboek* (journal) de Huygens (publié comme supplément au Recueil *Oud-Holland*, 3e année), nous trouvons, à la date du 9 déc. 1632, cette mention: „*Obit. heu*! Albus Girardus, *vir incomparabilis*''. Or, dans ce *Dagboek*, Huygens n'est guère prodigue d'annotations n'ayant pas rapport aux membres de sa famille.

[1]) Passé un certain âge, ces données deviennent plus rares. En quelque mesure, on peut les compléter au moyen de la correspondance de Constantijn avec son fils Christiaan. Nous y apprenons, par exemple, que la connaissance de celui-ci avec Slusius s'est faite, en 1657, par l'entremise du père. Il semble, toutefois, qu'avec le progrès des ans les sciences exactes soient devenues de plus en plus étrangères aux préoccupations de Constantijn.

est importante, et elle nous a même permis d'ajouter à la liste des œuvres de l'illustre philosophe un écrit, qu'à la vérité nous ne possédons pas dans la rédaction originale de la main de Descartes, mais dont, tel qu'il est, la paternité intellectuelle n'en doit pas moins lui être attribuée [1]).

Au sujet de sa première initiation aux mathématiques, Huygens lui-même nous a fait, dans ses *Sermones* [2]), quelques

---

[1]) Voir, plus loin, l'Annexe II.

[2]) *Haec inter complura, patri manifesta parerga,*
Una senem latuit fallax industria. Ne quid
Oti subriperem penso tum nempe diurno,
Neu minus historiis Latiis Graecisque vacarem:
Noluerat me adscititio indulgere labori.
Subripui tamen, et jucunda fraude fefelli.
Quique matheseos a teneris insederat ardor,
Explevi tacitus: fuit haec mihi charta, fritillus,
Et pila, et ingenuis a moribus alea discors.
Noctibus hic ipsis aliquid decidere juvit,
Extensaque die, quas somnus perderet horas
Applicuisse rei propero pede conficiendae.
Confeci: cum jam numeros abacumque logistae
(Quo sine vana geometriae documenta fuissent
Intempestivusque labor) mihi maximus olim
Tradiderat Clotius facili molimine, paucis
Hebdomadis: ut jam Mercatoria prorsus
Me fugeret ratio rationum, aut Amstelodami
Insatiabilis in libris mysteria Pluti.
Jamque adeo Euclidis commercia clandestina
Cum puero non sustinuit culpare parentum
Optimus; ut prope, quas pro spreto reddere grates
Mandato nollet, pensaret laude paterna,
Fallentemque magis, quam si non falsus, amaret.

Constantini Hugenii *de vita proprea sermonum inter liberos libri duo*, lib. 1, vers. 243—266.

communications, qui peuvent être complétées plus ou moins à l'aide d'une autobiographie — bientôt interrompue — dont le manuscrit se trouve au Trippenhuis [1]). Il en appert que Clotius, le gendre de Ludolf van Ceulen, ne resta que peu de mois [2]) le précepteur de Constantijn. Grande était la sympathie réciproque du maître et de l'élève. Après chaque leçon de Clotius, Constantijn devait répéter et expliquer à Dedel, son professeur de langues classiques, ce qu'il venait d'apprendre. Dedel prenait intérêt à ces exercices et ne dédaignait pas — suivant l'expression de Huygens — de se mettre à l'école de son écolier. Huygens croyait que cet arrangement avait été imaginé par son père, dont le but principal, au reste, n'était que de faire acquérir à son fils la connaissance de l'arithmétique commerciale.

Ce même volume [3]) des manuscrits garde les traces d'un de ces „Euclidis *commercia*", établi, il est vrai, à un âge plus avancé. On y trouve, en effet, de la main de Huygens, un court extrait des démonstrations et constructions des six premiers livres d'Euclide. La date, juillet 1627, ne laisse pas d'être curieuse. Marié depuis quelques mois à peine, Huygens avait dû quitter la Haye, pour se rendre auprès de Frédéric-Henri, à l'armée. Il travaille le premier livre à Arnhem, le 10 juillet; le second, dans la même ville, le 13 juillet; le troisième, le quatrième et le sixième, au camp de Grol, du 22 au 27 juillet. Dans ces brèves annotations, du reste, il n'y a pas grand'chose à remarquer. On y constate seulement, non sans surprise, une certaine indépendance de jugement vis-à-vis d'Euclide. Lorsque celui-ci, ne voulant pas que la longueur d'une ligne soit reportée au compas, mais exigeant que tout

---

[1]) Manuscrits, n°. 48, sous le titre: *Vita*.

[2]) A partir du 12 octobre 1609 (*Dagboek* p. 8). Constantijn avait donc treize ans.

[3]) N°. 48, p. 285.

s'obtienne par intersection de droites et de cercles, indique une construction passablement laborieuse pour mener à partir d'un point une droite de longueur donnée, Huygens ne voit là qu'une complication inutile (*inutilis molestia*), et plus loin il se dépite de ce que Euclide, pour l'amour de la forme rigoureuse à laquelle il croit devoir tout soumettre, tombe dans des redites. Du sixième livre, qui traite des propriétés des lignes proportionnelles, il ne fait pas de résumé, parce que les démonstrations sont simples et que les propositions ont, pour l'application subséquente, une valeur très inégale. Sur tous ces points, il faut le dire, les auteurs des ouvrages élémentaires modernes donnent raison à Huygens. Le fait que celui-ci, à son âge et dans ces circonstances, s'occupait des premiers éléments de la planimétrie, est évidemment une preuve de son goût pour les mathématiques; mais on peut en conclure aussi qu'il n'avait pas pénétré très loin dans la technique de cette science, du moins si les annotations ont été rédigées — comme la forme et le contenu tendent à le faire croire — pour son instruction personnelle.

Aussi n'est-ce pas vers les mathématiques pures que Constantijn, arrivé à l'âge d'homme, se sent le plus vivement attiré. S'il les place si haut, c'est qu'il comprend que les progrès des sciences physiques en dépendent en grande partie. Provisoirement, c'est la dioptrique „*nobilissima pars matheseos*" [1]), qui lui inspire le plus d'intérêt. Lorsque Golius, en 1629, succède à Snellius dans la chaire de Leide, Huygens

---

1) Manuscrits, n° 44 et 45 (*Lettres latines*). Lettre n°. 224, à Hortensius, 29 oct. 1655.

lui recommande [1]) de s'appliquer tout spécialement à cette partie de la science. „Les conséquences de la loi de la réfraction" — lui écrit-il — „n'ont encore été suffisamment étudiées par personne. Quelque prodigue de promesses qu'on soit en Italie, on n'y fera rien de si important que vous ne puissiez le faire vous-même. Albert Girard m'a communiqué différentes choses qui pourraient fournir un bon point de départ. Pour lui, il s'agit exclusivement de l'application de la loi de la réfraction, *moi* je voudrais savoir aussi quelle cause physique il y a là-dessous [2]).

Le conseil était certes bon, encore que Golius ne fût pas l'homme à en tirer le vrai profit. Pourtant, ce conseil ne resta pas sans effet aucun. Nous trouvons de la main de Golius [3]), à l'adresse de Huygens, une lettre très détaillée, en date du 1er novembre 1632, dans laquelle il lui annonce, trouvaille importante, que la célèbre loi de la réfraction de Descartes avait déjà antérieurement été énoncée et prouvée expérimentalement par Snellius. Le témoignage de Golius étant de grand poids pour la question de savoir si Descartes a emprunté, oui ou non, l'idée de sa loi à Snellius, je le rapporte, ci-dessous, en entier. Il en résulte, d'une part, que Golius ne soupçonnait pas la bonne foi de Descartes et que,

---

1) *Lettres latines*, Lettre n° 111, à Golius. du 19 déc. 1629: *Hortari deinde libet, ut quando nunc rei mathematicae etiam ex officio vacas, ejus quae de radio refracto est, partem nemini satis excultam, serio tibi commendatam esse patiaris.*

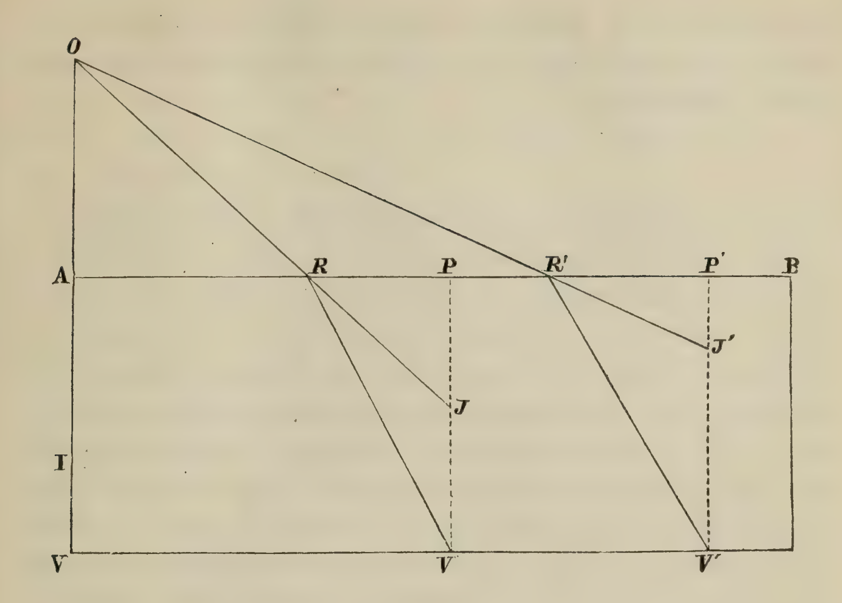
2)...*At nudis refractionum incrementis ac horum proportionibus incubuerat. Ego vero etiam aliquid hic physici requiro, et de causarum causis mihi ab origine satisfieri velim* .. Déjà en juillet 1629, Lettre n°. 102, Huygens avait écrit à Golius, à propres d'un ouvrage de Scheiner: „*satis prolixe docet, sed me solertia hominis et errori inveterato destruendo diligentia summa capit. Nam, ut multo me nosti rectius, hallucinamur hactenus eâ parte Matheseos maxime, quae de visione est et fustra quis pervadere has tenebras tentet, cui refractionum ratio absolutissima non constet*".

3) Manuscrits, n°. 42*a*.

à *lui* du moins, il n'était pas connu que Descartes, à cette date, eût vu les manuscrits de Snellius; mais, d'autre part, il est probable que Golius aura communiqué sa trouvaille à Descartes, avec qui il était en fréquentes relations d'amitié, et si l'on considère que Christiaan Huygens déclare formellement que Descartes *a* vu les manuscrits de Snellius, cette probabilité se change presque en certitude et l'on se rend clairement compte de la manière dont les choses se sont passées. De plagiat, il n'est alors plus question, mais, lors de la publication de sa *Dioptrique*, en 1637, Descartes savait que Snellius l'avait devancé.

Voici donc ce qu'écrivait Golius: „*id autem officio postulato reliquo optabilius esse, tibique fore gratius confido, pro quo fidem ante menses aliquot operamque obstrinxi meam; nisi forte et hic quoque mihi fraudi sit longa cunctatio; quod tamen ut minus metuam, facit tum difficultas et momentum rei, tum aequitas et facilitas animi tui. Neque enim asserere hactenus fui ausus ingeniosi Descartes inventum; quod tamen seu praesagio seu affectu quodam apud te jactare non extimueram, sc. Refractionis leges, ab illo descriptas, quas veras esse et ipsius naturae, me credere visus et ratio nunc cogunt. Coepi nuper experimenta quaedam, incidique paulo post in Snelliana plurima, quae ambiguitatem et scrupulum exemerunt omnem. Ambo illi, qui dici merentur magni Mathematici, haud unquam inter se cogniti, diversis locis et temporibus contrarias ingressi vias, per principia et causas Gallus, per effectus et observata Batavus, aliis et diversis verbis concluserunt prorsus idem. Quod neque celare Ampl. tuam, neque sine studio divulgare velim, quô et tibi mea constet observantia, et inventoribus sua in solidum gloria. Snellius venerandae memoriae praeceptor meus, cum ex Vitellionis calculo et tabulis, tum ex propriis ad observata plurima eaque saepius et diversimode repetita, subductis, hoc formavit theorema opticum.*"

„*Si duplex fuerit medium, densitate et raritate differens, radius quivis incidentiae verus ad suum apparentem in ejusdem generis medio eandem servat rationem.*"



„*Esto medii densioris terminus* A B, *visibile V, radius incidentiae V R, refractus in rariori medio R O, oculi situs in puncto O. Videbitur itaque imago rei visibilis in concursu radii refracti O R continuati, et perpendicularis incidentiae; quae sit V P, et punctum concursus J. In eodem itaque medio, sc. hic densiore, radius incidentiae verus erit V R, suusque apparens R J. Docent observata quae ratio est V R ad R I, semper obtinere eandem inter quoscunque radios similes; ut V' R' et R' J', quin in ipso radio perpendiculari et irrefracto* V A, *ubi incidentis ipsius pars est radius apparens, neque enim res visibilis* V *spectata perpendiculariter suo apparet loco; sed superiore in* I*: atque ut* V A *ad* A I, *ita V R se habet ad R I. Unius itaque radii obliquatione, aut perpendicularis contractione cognita, quod modis pluribus facile fieri potest, cognoscetur ratio caeterorum incidentium et apparentium omnium, quae, exempli gratiâ, in aqua est ut* 4 *ad* 3, *in vitro ut* 3 *ad* 2, *quando sc. utrobique oculus consistit in aëre.*"

A côté d'une interprétation inexacte quant au lieu où se forment les images, on reconnaît facilement, dans cet exposé,

la vraie loi de la réfraction; aussi Golius n'a-t-il aucune peine à faire voir que la loi ici formulée est identique à celle qu'a donnée Descartes.

C'est probablement dans la maison de Golius qu'eut lieu, en avril 1632, la première rencontre de Huygens et de Descartes. L'impression que ces deux hommes reçurent l'un de l'autre ressort de différentes lettres que nous possédons. Huygens [1]) mande à Golius: „*Ex quo postremo a te abii, vir doctissime atque amicissime, secuta me imago est mirabilis Galli, amici, non citra invidiam meam, tui, cujus in magnâ urbe paulum sepultae distat inertiae celata virtus. Illam praecipue, quam de Refracti radii demonstratione tanquam de re levi ac perspicua spem fecit, nusquam deposui.*" De son côté, Descartes, le 23 mai 1632, écrit à De Wilhem, beau-frère de Huygens [2]): *Je ne scay que respondre à la courtoisie de M. Huguens sinon que je cheris l'honneur de sa connaissance comme l'une de mes meilleures fortunes, et que je ne seray jamays en lieu ou je puisse avoir le bien de le voir que je n'en recherche les occasions.*" Cette admiration réciproque ne fit d'ailleurs que croître lors de nouvelles rencontres, comme le prouvent ces termes enthousiastes de Huygens [3]): „*Pardonnez, s'il vous plaist à la forte impression que vous m'avez laissée de quelque chose de surhumain*", et non moins ces passages flatteurs, cités par M. Unger dans *Oud-Holland*, d'une lettre [4]) de Descartes à Golius: „*Mais ce qui vaut mieux que tous les tourneurs du monde, c'est que* M. Zuylichem *que j'ay eu l'honneur de voir ces jours à Amsterdam après avoir eu la patience d'ouir lire une partie de ma dioptrique, s'est offert d'en faire faire lui-même quelque espreuve, ce qui me met entièrement*

---

1) *Lettres latines.* Lettre N°. 156, 7 avril 1632.

2) Foucher du Careil, *Oeuvres inédites de* Descartes, T. II, p. 233.

3) *Lettres françaises*, I, p. 643; lettre du 28 octobre 1635.

4) Introduction au *Dagboek*. La lettre (du 6 avril 1635) se trouve aux Archives de l'Etat, collection Beeldsnijder van Voshol, carton XXXII.

hors de peine de ce côté, car je m'assure que s'il est possible que la chose réussisse, il en trouvera les expédients plutost que personne" — et plus loin : *„Je ne tire pas peu de vanité de ce que je ne luy ait sceu dire aucune chose qu'il ne comprist quasi avant que j'eusse commencé de l'expliquer."*

Si l'on voulait toutefois déduire de ces passages — et leur sens littéral y prête — que Huygens se sentait parfaitement à l'aise sur le terrain de la théorie mathématique de la dioptrique, on se tromperait. Ni dans sa correspondance, ni ailleurs, on ne trouve rien qui oblige à douter de sa sincérité lorsque, écrivant à Descartes *„pour incapable que je soye de vostre belle Théorie je ne vous demeureray pas tousiours en faulte de l'industrie méchanique"* [1]) et à Hortensius *„sane ignarus, sed totius opticae ardentissimus amans"* [2]), il indique ainsi sa position au regard de cette théorie. Mais les expressions élogieuses de Descartes sont incontestablement un nouveau témoignage de la vivacité de conception de Huygens et de la facilité avec laquelle il savait entrer dans les idées des autres.

Nous verrons bientôt quelle était l'expérience dioptrique pour laquelle Huygens avait promis sa coopération et qui devint l'origine d'une correspondance assez étendue entre lui et Descartes. Préalablement, nous devons dire un mot de la forme sous laquelle une partie de cette correspondance nous est accessible et des aventures qui lui survinrent.

Parmi les manuscrits du Trippenhuis intitulés *Lettres françaises*, se trouvent les minutes ou les copies de dix-sept lettres, la première du 28 octobre 1635, la dernière du 7 juillet 1645, adressées par Huygens à Descartes. De la plupart des lettres de Descartes à Huygens on ne connaît pas non plus les originaux mêmes. A l'exception de quatre lettres auto-

1) *Lettres françaises*, I, p. 643.

2) *Lettres latines*, N°. 224.

graphes, ce qu'on possède, sont des copies faites par Descartes et publiées par Clerselier [1]). Dans l'exécution de ces copies, Descartes évidemment ne s'attachait qu'au contenu essentiel. L'adresse et la date étaient le plus souvent omises, parfois même les copies de deux lettres étaient écrites à la suite l'une de l'autre. La confusion fut encore augmentée par les accidents que ces papiers éprouvèrent. Envoyés après la mort de Descartes à Clerselier, par les soins de Chanut, ambassadeur français à la cour de Suède, ils firent naufrage sur la Seine, furent repêchés, mis à sécher sur des cordes par des mains ignorantes et expédiés dans le plus grand désordre à Clerselier, qui ne diminua pas ce désordre lorsqu'il prit le parti de publier les lettres non par ordre de temps, mais classées d'après les sujets traités. Heureusement que Victor Cousin, ayant résolu de donner une nouvelle édition des lettres de Descartes, trouva dans la bibliothèque de l'Institut un exemplaire — qui y figure encore — enrichi d'annotations par un auteur inconnu, mais évidemment très compétent; selon la conjecture de Cousin, cet auteur serait Montempuis, selon celle de Millet, l'un des derniers biographes [2]) de Descartes, et qui prétend que Cousin n'a pas tiré de ces annotations tout le parti possible, ce serait Clerselier lui-même. Dans ces annotations, on a cherché à déterminer la date et l'adresse des différentes lettres. En ce qui concerne les lettres à Huygens, l'Annexe I à notre travail permettra de juger jusqu'à quel point ce but a été atteint En tout, on a pu retrouver d'une manière certaine quinze lettres, la dernière en date de mai 1643.

Il était improbable, toutefois, que les lettres originales, au moins celles de Descartes à Huygens, eussent pu se perdre. Huygens, qui écrivait à Descartes: *Je n'entens pas sans res-*

---

[1]) Les papiers originaux paraissent s'être perdus dans la suite; du moins, il n'en est fait nulle part mention et Cousin ne les connaissait pas.

[2]) *Histoire de* Descartes *avant* 1637, par J. Millet, 1867; Descartes, *son histoire depuis* 1637, par J Millet, 1870.

sentiment d'injure le doubte que vous semblez avoir, si les papiers dont il vous a pleu me gratifier autrefois ont esté conservez ou non. Il partiroit bien moins de chose de vostre main et ne se perdroit jamais dans la mienne [1]), devait les avoir rassemblées et conservées avec soin, et que tel a été réellement le cas, c'est ce dont j'ai acquis la certitude de la manière la plus inattendue, grâce à une communication de M. Moes. Jusqu'en 1825, ces lettres sont restées, conjointement avec celles de Huygens à Descartes, dans la collection C. A. van Sypesteyn; cette année-là, le 30 mai ou l'un des jours suivants, elles furent vendues par la maison Sotheby à Londres, l'une des liasses (Desc. Huygens) pour 23 £ 2, l'autre pour 12 £ 12. Les informations prises, au sujet des acquéreurs, chez les représentants actuels de la maison Sotheby, n'ont conduit à aucun résultat. Voici la description des deux lots, telle que la donnait le Catalogue de la vente, dont un exemplaire, où les prix sont notés, se trouve à la Bibliothèque royale de la Haye.

N°. 125. *A very curious Assemblage of letters in French, forty-six in number from M.* Constantine Huygens, *sieur* de Zulichem, *to the celebrated* Descartes, *between the years* 1635 *and* 1647, *with one letter to M.* van Hogelande.

The enveloppe containing these has the following title in M. de Zulichem's *handwriting: „Lettres que j'ay escrittes à Mons.* Descartes *de l'an* 1635 *jusques à* 1647, *inclus, restituées après sa mort par M.* de Hogelande, 21 *Juillet* 1650."

N°. 126. *A similar Assemblage partly bound together* (*but without covers*) *and partly loose; being the letters of M.* René des Cartes *to M.* Constantine Huygens *between* 1635 *and* 1649.

The letters are sixty-seven in number and with the exception of one or two are entirely in French. They relate either to transactions between the parties, Descartes *Works, or mathematical subjects; a few are accompanied by diagrams. In one letter of* 1641 Descartes *gives a list of the typographical errors in his Meditationes de*

---

[1]) *Lettres françaises*, I, p. 715.

prima philosophia. Interspersed are a few letters and other papers connected with the correspondence, more particularly from Mons. A. van Surk, *Amst.* 19 *Nov.* 1639, *Ley.* 30 *Nov.* 1639 *and Leyd.* 21 *Dec.* 1639; *with a printed sheet entitled: Antwoordt van den Wel Edelen Heer* Rene des Cartes, *Heere du Perron op het gepubliceerde van de Heeren van de vroedschap der stadt Utrecht den* 13/23 *Junii des Jaers* 1643. *Uyt de Fransche tale overgheset* [1]).

Comme on le voit, la correspondance avait plus de trois fois l'étendue de la partie aujourd'hui accessible. Cette partie est probablement assez complète en ce qui concerne les premières années, mais ensuite elle laisse de plus en plus à désirer et finit par ne plus rien fournir du tout pour les quatre ou cinq dernières années. Sans doute, il n'y a pas lieu de désespérer que cette correspondance des plus importantes ne nous soit un jour connue en entier, dans sa forme primitive. On peut se demander, toutefois, si après 1825 les lettres de Descartes ne se sont pas dispersées. Certains faits semblent l'indiquer. C'est ainsi qu'on trouve à Leide [2]) une lettre autographe de Descartes à Huygens, qui servait d'accompagnement à l'opuscule sur la mécanique que Descartes avait composé pour notre compatriote. Peut-être serait-il permis de chercher dans cette circonstance la raison pour laquelle la lettre est restée à part; mais trois autres lettres, dont une appartenant à un Anglais, M. Morrison, et deux acquises en 1860 par M. Foucher du Careil [3]), ont, selon toute apparence, fait originellement partie de la collection.

---

[1]) Réponse de Monsieur René des Cartes, Seigneur du Perron à la Publication des Messieurs de la Municipalité de la ville d'Utrecht, du 13/23 Juin de l'An 1643. Traduit du Français.

[2]) Collection Huygens.

[3]) De la collection Van Voorst, mise aux enchères, fin janvier 1860, par Frederik Muller, à Amsterdam.

Quoi qu'il en soit, l'espoir de nouvelles trouvailles ne doit pas nous empêcher d'utiliser ce que nous possédons, et nous revenons donc à l'expérience dioptrique qui devait être entreprise sous la direction de Huygens.

On sait qu'à l'époque où nous devons nous reporter, les microscopes et les lunettes laissaient énormément à désirer quant à la netteté des images. La cause principale de ce défaut — la dispersion des couleurs — n'était pas connue dans sa vraie nature, et il était donc naturel que Descartes et d'autres s'appliquassent exclusivement à y remédier en faisant disparaître *l'aberration de sphéricité.* Comme il savait que les lentilles à surfaces sphériques sont incapables de réunir en un point uniquc les rayons lumineux parallèles ou émanés d'un même point, Descartes chercha et trouva la forme des surfaces qui possèdent cette propriété. Au nombre de ces surfaces étaient des hyperboloïdes et ellipsoïdes de révolution. Par une combinaison de surfaces elliptiques ou hyperboliques avec des surfaces planes et sphériques, il lui parut possible de construire des lunettes et des microscopes théoriquement parfaits. Il ne s'agissait que de tailler des lentilles ayant des surfaces de ce genre. A cet effet, Descartes avait imaginé une machine dont on peut trouver la description détaillée dans sa Dioptrique [1]). Un ciseau, forcé de se mouvoir suivant une hyperbole, découpait des lames en acier, dont on se servait pour évider hyperboliquement le bord cylindrique d'une roue et lui restituer exactement cette forme chaque fois que cela devenait nécessaire. Les lentilles, fixées à l'extrémité de l'axe d'un tour, étaient pressées contre ce bord évidé, pendant que la roue tournait lentement en plongeant par le bas dans une auge où se trouvait de la poudre à polir.

Bien que Descartes eût tout combiné jusque dans les

---

[1]) Cousin, *Oeuvres de* Descartes, T. V, p. 137.

moindres détails, il ne se dissimulait nullement les difficultés inhérentes à l'exécution mécanique, mais, écrit-il: „*Je ne me règle pas sur la portée ordinaire des artisans, mais je veux espérer que les inventions que j'ay mises en ce traité seront estimées assez belles et assez importantes pour obliger quelques uns des plus curieux et des plus industrieux de notre siècle à en entreprendre l'exécution.* Dès l'année 1629, au reste, il avait déjà été en relation avec un certain Ferrier, qui devait essayer de tailler les lentilles hyperboliques; la chose, toutefois, après beaucoup de peines et de temps perdus, s'était terminée par des plaintes réciproques. Maintenant, elle allait être reprise, avec l'aide d'un habile tourneur d'Amsterdam. Du camp de Pannerden, Huygens écrit, le 28 octobre 1635 [1]): *L'ardeur ou vous m'avez veu de faire jouer le ressort de la machine que vous avez ordonnée pour le polissement de l'hyperbole, ne s'est point attiedie, mais vous sçavez par ou mon esprit et mon corps ont rousle depuis, et certes ceste longue campagne et la suitte des occupations que je trouveray au retour, m'en ennuyent au double, mais cela prendra quelque fin un jour, et pour incapable que je soye de vostre belle Théorie je ne vous demeureray pas tousiours en faulte de l'industrie méchanique. Desia l'humeur m'a prins d'envoyer au Tourneur d'Amsterdam une hyperbole soigneusement marquée de ma main, a la distance de quelques* 14 *poulces pour les points brûlants. S'il a le jugement dont il s'est vanté, il me taillera sur ceste forme un verre convexe d'un diamètre plus ample que ne sont ceux des lunettes ordinaires, et vous me pardonnerez, j'espère, si je ne puis trouver sensible au Tour l'inconvenient dont vous avez faict mention en ce que les faultes du mousle doibvent causer autant de cercles dans le verre, cela est très vray à part soy, mais je suis d'opinion que le mousle se peut tenir hors de faulte perceptible au moins, nous en verrons cest essay,*

---

1) *Lettres françaises*, T. I, p. 643

et vous ordonnerez par après, selon quoy le petit verre [1]) *ce debura regler.*" Plus loin, Huygens dit avoir appris que Hortensius, le professeur d'Amsterdam, prétendait que la forme sphérique est la meilleure et se flattait de pouvoir construire, avec des lentilles de cette forme, des lunettes permettant de lire une lettre à la distance d'une lieue. Huygens l'avait prié de produire sa demonstration ou bien de faire construire une lunette suivant son système [2]).

Cependant, la première lentille hyperbolique est achevée et elle satisfait Huygens, qui s'émerveille de ce qu'on n'y voie rien des défauts que Descartes avait attendus de l'emploi du tour sans l'adjonction de la roue hyperbolique [3]); mais Descartes la renvoie [4]), avec un morceau de carton percé d'ouvertures. Appliqué sur le côté plat de la lentille, ce carton faisait voir que les rayons tombant à des distances différentes du centre ne se réunissaient nullement en un même point; or, c'est là précisément ce que Descartes avait craint, parce que, au tour ordinaire, chaque défaut se reproduit tout le long de la circonférence du cercle. Descartes avait bien songé à la possibilité que la forme de l'hyperbole ne s'accordât pas

---

1) L'oculaire.

2) La lettre à Hortensius se trouve parmi les *Lettres latines*, N°. 224. Huygens prend très au sérieux l'assertion de Hortensius et lui représente les grands avantages qu'il pourrait retirer de son invention. Mais Hortensius s'était évidemment trop avancé, et c'est là probablement une des raisons de l'opinion très défavorable de Descartes sur Hortensius. Du moins, Descartes se montre vivement froissé de la remarque de Hortensius, quand il écrit ironiquement à Huygens (Foucher du Careil, II, p. 227): „*Au reste vostre travail d'avoir tracé vous même une hyperbole est bien inutile, puisque la figure circulaire est la meilleure, et il y a bien plus de raison de croyre en cecy l'autorite d'un professeur, appuiée de toutes les expériences des artisans, que les imaginations d'un hermite qui confesse ingenument qu'il n'a jamais fait aucune espreuve de ce qu'il dit.*"

3) *Lettres françaisés*, T. I, p. 625; 5 déc. 1635.

4) Cousin, VI, p. 325.

avec le pouvoir réfringent du verre employé, — mais non, il y avait plus, ce n'était pas une hyperbole du tout.

Huygens, toutefois, ne perd pas courage. Descartes lui envoie une hyperbole tracée de sa main, et dont Huygens admire la pureté: „*Je vay remettre mon tourneur à la seconde espreuve, dans laquelle je me suis bien assuré que ses faultes ne trouveront plus le prétexte dont il m'a payé par le passé* [1]) Le tourneur paraît donc avoir rejeté la faute sur le dessin de Huygens.

Cette seconde épreuve aussi doit avoir échoué. En septembre 1637 [2]), en effet, Huygens a reconnu qu'au tour ordinaire les difficultés sont insurmontables. On suivra maintenant de plus près les indications de Descartes, mais pourtant le tourneur espère arriver au but d'une manière un peu plus simple, et — dit Huygens — *c'est* un homme ingénieux. A Amsterdam on fera faire des prismes de verre, „ici", c'est-à-dire au camp de Breda, on déterminera le pouvoir réfringent, puis le jeune van Schooten tracera exactement l'hyperbole et Huygens veillera à ce que la lentille soit bien travaillée par le tourneur.

Descartes est enchanté de cette persévérance [3]), mais doute que le tourneur ait raison. Cependant, il lui rend visite dans le courant de l'hiver, et reçoit de lui une impression favorable. Il sera fait un modèle en bois de la machine, et quand ce modèle sera prêt, Descartes ira le voir. Il prie Huygens [4]) de l'avertir à temps, car il n'aimerait pas qu'avant ce moment on travaillât à la machine proprement dite. Si le tourneur réussit, il tâchera de lui procurer patente en France. Richelieu aussi veut faire construire en France des lentilles hyperboliques, mais Descartes ne croit pas qu'on y parvienne, à moins qu'il ne soit présent lui-même.

---

1) *Lettres françaises*, I, p. 715.

2) *Lettres françaises*, I, p. 759.

3) Cousin, T. VI, p. 329.

4) Cousin, T. VII, p. 410.

Comment les choses marchèrent ensuite, la partie accessible de la correspondance entre Huygens et Descartes ne nous l'apprend pas; mais une lettre écrite un peu plus tard à Ferrier, lequel paraissait enclin à reprendre la tentative autrefois avortée, nous fait connaître le résultat final des essais amsterdammois [1]), qui avaient été vigoureusement poursuivis. La machine à découper les lames en acier avait parfaitement répondu à l'attente. Mais il avait été impossible, à l'aide de ces lames, de travailler la roue avec assez de précision pour qu'elle pût tailler une lentille de forme régulière. Pourtant, on avait obtenu deux ou trois verres qui donnaient bonne espérance. Lorsque, écrit Descartes, on n'en laissait qu'une partie découverte, de la grandeur des verres des lunettes ordinaires, on ne voyait rien que de fort obscur, néanmoins, quand ils étaient tout découverts, ils avoient autant d'effet que les ordinaires, ce qui montroit que s'ils eussent été aussi polis, ils eussent eu d'autant plus d'effet qu'ils étoient plus grands, qui est tout ce qu'on peut espérer. Il s'agissait donc d'obtenir un meilleur polissage.

C'est à quoi, toutefois, on n'est parvenu ni à Amsterdam, ni à Paris, et ainsi la tentative à laquelle Huygens avait collaboré avec tant d'enthousiasme n'aboutit qu'à un mécompte [2]).

Mais, pour cela, la correspondance une fois commencée ne s'arrêta pas. Successivement, il y fut question de sujets très divers, dont nous mentionnerons quelques-uns [3]).

---

1) Cousin, T. 6, p. 45.

2) On a renonçé depuis aux lentilles hyperboliques, mais après Descartes, en 1656, Christiaan Huygens et Hevelius tentaient encore de les réaliser. Voir: Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, T. I, p. 384 et 488.

3) Quelques lettres postérieures (*Lettres françaises*, II, p. 137; II, p. 123; II, p. 247) ont aussi, sans contredit, de l'intérêt pour l'histoire des démêlés de Descartes avec Voetius; mais c'est là un sujet où je ne me risque pas.

Dès le début, Huygens apparaît comme conseiller à propos de la publication, projetée par Descartes, de son *Discours de la Méthode* joint à *la Dioptrique, les Météores* et la *Géométrie* [1]). Il recommande comme éditeur Willem Jansz. Blaeu, avis qui, nous ne savons pourquoi, ne fut pas suivi, préfère pour les figures la taille de bois à la gravure sur cuivre, et insiste surtout pour que Descartes fasse imprimer les figures dans le texte et non à la fin de l'ouvrage. L'incommodité que cette dernière disposition cause au lecteur, il la compare assez ingénieusement à *la peine de l'oiseau, qu'on dit travailler à percer les Arbres et en faire tant de fois le tour pour veoir s'il a passé.* Plus tard — lorsque la publication est commencée — Huygens donne son sentiment sur la forme de l'impression, et offre d'aider à corriger les épreuves [2]).

D'autre manière encore, il tâche de se rendre utile, savoir, en se chargeant de l'expédition de livres et de manuscrits entre Descartes, qui continuait à séjourner en Hollande, et son correspondent français, le père Mersenne, à Paris [3]). L'envoi de paquets par la poste entraînait de grands frais. On cherchait donc d'autres occasions, et elles n'étaient pas faciles à trouver. „*M.* de Zuylichem *n'étant pas à la Haye, je ne sais par quelle voie je pourrais vous envoyer le livre*" [4]), écrit,

---

[1]) *Lettres françaises*, I, p. 643 (28 oct. 1635).

[2]) *Lettres françaises*, I, p. 715 (15 juin 1636), p. 769 (5 janv. 1637).

[3]) A l'occasion d'un de ces envois, nous apprenons à connaître l'opinion de Huygens sur le père Mersenne. A la personne (inconnue) qu'il charge de faire parvenir un paquet à son adresse, il écrit: „*après que le maistre Moine* (c'est le père Mersenne) *se sera acquisté de ce qu'on luy demande je seray très content que les reponses repassent par mes mains, qui ay de l'inclination pour luy, à raison de celle qu'il témoigne avoir à l'avancement des sciences; quoy que par trop embrasser il estreigne un peu mal. Ce qui je vous prie de ne luy dire pas, mais bien que je suis son serviteur et attends de veoir ce qu'il promet de beau au publiq. Car il ne cessera pas d'escrire jusqu'au cercueil.*" *Lettres françaises*, T. I, p. 783.

[4]) Cousin, T. VII, p. 178 (31 mars 1638).

par exemple, Descartes au P. Mersenne. En sa qualité de Secrétaire du Prince d'Orange, Huygens avait beaucoup d'envois à faire, et on en profitait.

De son côté, Descartes ne refuse pas de satisfaire à la modeste prière de Huygens, demandant qu'il lui expose en trois pages les premiers principes de la mécanique et leur application aux quatre ou cinq machines les plus importantes (poulie, plan incliné, coin, treuil, vis, levier). Huygens avait lu *Guido Ubaldi* et *Galilée* dans la traduction du père Mersenne, mais il n'est pas satisfait „*m'imaginant que ces gens là ne font qu'envelopper de superfluités obscures, une chose que je m'assure que vous comprendrez en deux ou trois suppositions*" [1]).

L'opuscule de Descartes se trouve imprimé dans l'édition de Cousin [2]), tandis que l'original est conservé à Leide (collection Huygens). En lui adressant ses remercîments de réception les plus vifs, Huygens presse Descartes [3]) de développer complètement et de publier ses idées „*pour ne laisser rien à dire aux scavants ni à souhaister aux apprentifs de ceste jolie estude journalière que vous aurez illustré le premier et sorti de l'embarrassante obscurité des Italiens, qui* FACIUNT NON INTELLIGENDO, *etc.*", jugement qui, surtout en ce qui touche Galilée, n'est pas ratifié par la postérité.

Descartes, au reste, ne s'est pas rendu à cette invitation. Il écrit bien „*qu'il a omis le plus beau du sujet* [4]), mais, provisoirement, il est absorbé par de tout autres préoccupations. Il cherche les moyens de prolonger la vie humaine beaucoup au-delà de ses bornes ordinaires. Pendant quelque temps cette question reste à l'ordre du jour, sans toutefois qu'il en ressorte rien de bien intéressant.

Entre temps, Huygens consulte Descartes au sujet des mer-

---

1) *Lettres françaises*, I, p·759.
2) Cousin, T.V, p.431.
3) *Lettres françaises*, I, p.817.
4) Cousin, T. VII, p.412.

veilleux tours d'un certain docteur van der Straten [1]). Celui-ci prétend pouvoir faire fondre de l'or et des diamants dans la paume de la main de quelqu'un — la chose aurait réussi deux fois chez le marquis Spinola — par un dissolvant si doux qu'on peut le prendre sur la langue, et en moins de temps qu'il n'en faut pour réciter quelques patenôtres. En peu de temps il coupe des barres d'acier.

Ensuite vient sur le tapis la dispute entre deux mathématiciens hollandais, Stampioen et Wassenaer. A cette dispute nous consacrerons une Annexe spéciale (Ann. II), à cause du rôle important que Descartes y a joué.

Huygens demande aussi l'avis de Descartes sur une machine — un *perpetuum mobile* — qui excitait de grandes espérances à Amsterdam [2]). Cet avis ayant été défavorable, il s'y soumet, mais ne laisse pas passer l'occasion d'engager Descartes à diriger sa pensée sur l'emploi le plus avantageux du vent et de l'eau comme force motrice, sujet d'une si haute importance pour les Sept-Provinces!

Plus loin, nous voyons le père Mersenne recourir à l'intervention de Huygens pour obtenir de Descartes la solution d'une question qui lui paraissait très énigmatique: Comment se peut-il que la *hauteur* d'un jet d'eau lancé verticalement soit proportionnelle à la hauteur de pression elle-même, et que la *distance* à laquelle atteint un jet d'eau lancé horizontalement ne soit proportionnelle qu'à la racine carrée de la hauteur de pression? Suit une longue réponse [3]), dans laquelle la chose se trouve expliquée à peu près comme on le ferait encore aujourd'hui, explication qui est présentée — évidem-

---

1) *Lettres françaises*, I, p.807. La réponse de Descartes (Cousin, T. VIII, p.53) ne devient bien intelligible que par la lettre de Huygens.

2) *Lettres françaises*, II, p. 93 (26 mai 1642). Cousin, T. IX, p.87.

3) Cousin, T. IX, p. 88. Il me semble que Descartes s'excuse plus ou moins d'employer, vis-à-vis de Huygens, un peu d'algèbre.

ment en faveur de Huygens, et d'une manière très heureuse — sous une forme populaire.

Notons, enfin, que Huygens s'intéresse aussi à des recherches magnétiques, et que la dernière lettre de notre collection [1]) renferme la prière à Descartes de vouloir exposer ses idées sur la chimie *„pour veoir en combien peu de nomenclature vous comprenez tant d'eaux, de sels, d'huiles, d'essences, d'esprits."*

Avant de passer à un autre sujet, qu'il nous soit permis de dire un mot du ton qui règne dans cette correspondance. On sent bien vite que Huygens et Descartes ne conversaient pas ensemble sur le pied d'une égalité parfaite. A chaque instant on voit Huygens donner cours à son admiration pour Descartes et subordonner son propre jugement à celui de son illustre correspondant. Descartes, de son côté, est évidemment dans les dispositions les plus amicales envers Huygens. De l'amertume à laquelle il lui arrivait de se laisser aller, même vis-à-vis du père Mersenne, et qui était sans nul doute le contre-coup du sombre accablement parfois étendu sur son esprit inquiet, jamais on ne découvre la moindre trace lorsqu'il écrit à Huygens; mais, quant à son opinion, il l'émet toujours de la manière la plus décidée, souvent sans l'appuyer de raisons et en choisissant la forme ironique.

Huygens, par exemple, vient de lire un ouvrage de Campanella, auquel manifestement il attache une certaine importance. Qu'on remarque en quels termes circonspects il demande l'avis de Descartes: *„si vous tenez tousiours la vérité en séquestre, tantost nous serons aussi héritiques que le* Campanella, *dont je vous envoye le sommaire en cholere et pour peine de voz rigueurs, vous condamnant, s'il vous est nouveau à y jetter la veue, pour*

---

1) *Lettres françaises*, T. II, p. 247 (7 juill. 1645).

me dire au moins si, en attente du flambeau de voz vérités, il m'est permis de courir un peu après ce feu follet" [1]). La réponse est: *„m'ayant trouvé occupé à répondre à quelques objections, qui m'étaient venues de diverses parts, j'avoue que son langage* (de Campanella) *et celui de l'Allemand qui a fait sa longue preface, m'a empêché d'oser converser avec eux avant que j'eusse achevé les dépêches, que j'avais à faire, crainte de prendre quelque chose de leur style* [2]), — puis vient, en peu de mots, une désapprobation complète du contenu des écrits de Campanella.

Caractéristique aussi est la façon dont Descartes répond [3]) à l'envoi de l',,*Orgelgebruyck*" de Huygens. Dans cet opuscule, Huygens plaidait en faveur de l'introduction de l'orgue dans le culte protestant. De crainte, peut-être, que ce plaidoyer ne lui donnât l'apparence d'incliner vers le catholicisme, il y avait glissé quelques duretés à l'adresse de l'église romaine. Descartes, qui en dépit de ses idées philosophiques s'estimait bon catholique, loue l'opuscule [4]), mais se venge des épanchements anti-catholiques de Huygens par quelques railleries: *„Pour vos raisons, je puis dire qu'elles sont si fortes et si bien choisies, que vous persuadez entièrement au lecteur tout ce que vous avez témoigné vouloir prouver; ce que j'avoue ici avec moins de scrupule à cause que je n'y ai rien remarqué qui ne s'accorde avec notre église. Et pour ces epithètes que vous nous donnez cependant en divers endroits, je ne crois pas que nous devons nous en offenser davantage, qu'un serviteur ne s'offense quand sa maîtresse l'appelle „Schelm" pour se venger d'un petit baiser qu'il lui*

---

[1]) *Lettres françaises*, I, p. 817.

[2]) Cousin, T. VII, p. 417.

[3]) Cousin, T. IX, p. 118.

[4]) *„Je me persuade pourtant que l'idiome ne m'a pas empêché d'entendre le sens de vostre discours, dans lequel j'ai trouvé un ordre si clair et si bien suivi, qu'il m'a été aisé de me passer du mélange des noms étrangers qui n'y sont point, et qui ont coutume de me faciliter l'intelligence du flamand des autres."* Eloge remarquable, et certes non médiocre, de la pureté du style de Huygens!

a pris, ou plutôt pour couvrir la honte qu'elle a de le lui avoir octroyé. Il est vrai que ce baiser n'avance guère, et je voudrais qu'en nous disant de telles injures vous eussiez aussi bien déduit tous les points qui pourraient servir à rejoindre Genève avec Rome", etc.

Outre cette différence de ton, plus facile à sentir qu'à démontrer, ce qui nous frappe encore, c'est que Huygens, surchargé de besogne et ne disposant librement, il le déclare lui-même, que des heures de la nuit, juge pourtant son temps beaucoup moins précieux que celui de Descartes qui, au sens ordinaire du mot, n'avait pas d'occupation régulière. Ainsi, le père Mersenne s'étant un jour, contrairement à l'habitude établie, servi de l'intermédiaire de Descartes pour faire parvenir un paquet à Huygens, celui-ci coupe immédiatement court à ces libertés: „*pour moy je scay trop bien ce que valent les moindres moments de vostre loisir pour souffrir que ceux qui ne les considérent pas si bien en abusent à mon avantage*" [1]). Dans la même lettre, il témoigne l'extrême ravissement éprouvé en découvrant que Descartes a pris la peine de copier un écrit (la défense contre Saumaise) que lui, Huygens, avait soumis à son examen; et néanmoins, il est indigné à la pensée que Descartes a employé son précieux temps à copier ces „*pauvres défenses*". La copie elle-même, il la conservera avec le même soin et le même respect dont il en use envers le moindre petit papier de la main de Descartes [2]). Encore que ces expressions et d'autres analogues puissent être mises en partie sur le compte de la courtoisie du dix-septième siècle, il n'en est pas moins vrai que toute la correspondance respire un profond et sincère sentiment d'admiration et

---

1) *Lettres françaises*, II, p. 137 (6 juin 1643).

2) On trouve effectivement, dans le Catalogue ci-dessus cité de la vente Sotheby, la mention suivante: No. 124. *A paper entitled „Copie de la main de M.* Descartes, *de mes répliques sur une lettre de M.* Saumaise *à M.* Rivet *touchant l'épigramme qui s'ensuit", in M.* de Zuylichem'*s hand.*

de respect pour la supériorité intellectuelle de Descartes, et que par là, à notre avis, elle montre Constantyn Huygens, auteur renommé lui-même et très grand seigneur, sous un jour des plus aimables. Le caractère particulier de cette correspondance frappe encore plus quand on ouvre les lettres — dont quelques-unes figurent aussi parmi les *Lettres françaises* — adressées au père Mersenne, devant qui Huygens n'avait certainement pas à s'incliner. De celles-là, une tout autre impression se dégage [1]).

Dans sa correspondance avec Diodati [2]) nous voyons également Huygens mettre le pied sur le terrain des sciences physiques. En 1635, Galilée s'était adressé aux Etats-Généraux pour leur offrir sa découverte de la détermination de la longitude au moyen des éclipses des satellites de Jupiter. Les Etats inclinant à prendre la chose en considération, le 11 novembre 1636 une Commission, composée de Willem Blaeu, Reaal et Hortensius, et ayant le droit de s'adjoindre Golius, reçut le

---

[1]) Lorsque, par exemple, Mersenne arrive avec un plan pour élever de l'eau sans travail, au moyen d'un siphon, Huygens lui fait remarquer avec raison que ce serait peine perdue si, en haut, on ne pouvait rien en prendre; et veut-on, pour en prendre, pratiquer une ouverture dans le tube, il est à craindre que la „FUGA VACUI" „*qui est le ressort de la machine, ne s'en aille interrompue et morte*". Autrement, oui! on pourrait à peu de frais embellir considérablement un bien de campagne, et de la reconnaissance serait due à l'inventeur qui aurait rendu inutiles les moulins, ces appareils coûteux et embarrassants. De ceux-ci, au reste, nous en avons de toutes sortes, mus par le vent, par l'eau, par des chevaux ou par le bras de l'homme: „*choses ordinaires et cognues par tout le monde, non que de vous, monsieur, qui n'en voulez point ignorer*".

[2]) *Lettres françaises*, I, p. 771, p. 821, p. 973. La première et la dernière de ces trois lettres, du 13 avril 1637 et du 1er avril 1640, se retrouvent, en italien et avec de légères modifications, dans *Le opere di Galileo Galilei*, Firenze, 1848, T. VII. Celle du 13 février 1638 manque à cette publication. Elle sera reproduite dans l'édition des œuvres de Galilée, qui se prépare sous les auspices du Gouvernement Italien.

mandat d'examiner l'offre de Galilée. Bien que le projet se présentât d'abord favorablement et que les Etats eussent résolu, le 25 avril 1637, de décerner par anticipation une chaîne et une médaille en or à Galilée, comme marque de leur haute estime, on dut pourtant reconnaître que l'application de la méthode rencontrait encore des difficultés. De là, de longues négociations, au cours desquelles Elias Diodati, qui menait en grande partie la correspondance pour Galilée, s'adressa à Huygens, le priant de lui prêter son concours [1]). Par la réponse de Huygens [2]) nous voyons qu'il était parfaitement au courant de la question scientifique. L'affaire, mande-t-il, est en bonne voie, Reaal écrira à Galilée, „*mais ce sera . . . . en luy demandant un telescope de sa façon, ceux de ce pais ne pouvant representer les quatre satellites, dont il s'agit, sans je ne sçay quelle sorte de scintillation, qui pourrait empêcher les observations soudaines et momentanées de leur* CONIUNCTIONI, APPLICATIONI *et* ECLISSI, *telles que l'auteur nous les specifie, de sorte, Monsieur, que le rapport de ces commissaires ne s'étant peu faire que provisoire et en partie, sans l'ayde de l'engin principal, je ne voy pas quel subject le seigneur* Galileï *pourroit avoir de se tenir peu satisfait du delay de nos résolutions. Il restera d'ailleurs l'expedient si necessaire contre les agitations de la mer et l'horloge, de pareille importance à bien effectuer les operations. Tout cela est de l'essence, en tant que la chose regarde la navigation; si ne le voyons nous qu'en esperance, et qui sçait si ce grand personnage vivra assez pour nous achever d'instruire . . . J'advoue que,* SI SIBI CONSTAT CALCULUS EPHIMERIDUM *comme je suis bien content de m'en reposer sur la bonne foy de l'auteur, c'est desia un grand point gagné sur terre, et d'ou s'ensuivra nécessairement la réformation de toute la Géographie; mais les interêts particuliers nous pressant plus, et uniquement à nous voir designer en haute mer, ou nous sommes tant, au regard du long que du*

---

[1]) On trouve cette lettre, avec quelques autres de Diodati à Hortensius et à Huygens, dans *Le opere di* Galileo Galilei, T. VII.

[2]) *Lettres françaises*, I, p. 771.

large, vous pouvez considérer qu'il n'y a que l'invention marine qui nous chatouille principalement, et sans laquelle aucunement reduitte à l'effect de la pratique, que nos peuples auront de la peine à se tenir obligez d'un benefice general et beau, plus qu'avantageux à leurs affaires. Mais ce sera bien moi, Monsieur, qui travailleray à leur donner de plus saines impressions".

Cependant, les négociations n'avançaient que lentement et la convenance se fit bientôt sentir de dépêcher vers Galilée un homme compétent. Les Etats-Généraux devaient être amenés à voter les fonds nécessaires. „*Tâche délicate*", écrit Huygens, „*car le trésor y est intéressé*" [1]). Néanmoins, il s'y attelle: „*à combien de personnes de condition et d'authorité pensez vous que nous ayons estez obligez de prècher un Evangile incognu, prins d'abord pour folie*" [2]). Il parvient à gagner l'appui de Frédéric-Henri et détermine Cats à faire aux Etats la proposition d'accorder des frais de voyage à Hortensius, qui partira dans quelques semaines. Mais on n'en vient pas jusque-là. Une vraie fatalité semble avoir pesé sur l'affaire. Des membres de la Commission, Reaal, Blaeu et Hortensius [3]), le premier était décédé dès la fin de l'année 1637, le second mourut le 18 octobre 1638, et au sujet de Hortensius, qui du reste mourut aussi en août 1639, la dernière lettre de Huygens à Diodati contient une singulière révélation: „*Tout revient là cependant que feu le Sr.* Hortensius *estant venu*

---

[1]) *Lettres latines*, N°. 262, à Hortensius, 25 janvier 1638: „*ut grave, scilicet, negotium quia ad aerarii angustias pertinet*".

[2]) *Lettres françaises*, I, p. 821.

[3]) Huygens parle de QUATRE commissaires: „*Et de faict, tous les quatre personnages desputez à cette affaire estant venuz à deceder nous en voici comme à recommencer*". Le quatrième n'était pas Golius, mais Isaac Beeckman, dont la mort datait déjà du 20 mai 1637. Ce nom est cité dans une lettre de Diodati à Huygens, du 28 février 1640, lettre reproduite dans les *Atti del reale instituto Veneto di scienze* etc., T. VII, Sér. V, p. 393, d'après l'opuscule: *De vero telescopii inventore* etc. *Authore* Petro Borello, *Hagae Comitum*, Adr. Vlack, 1655, p. 53—61.

à mourir saisy des deniers qu'on luy avoit faict fournir pour le voyage d'Italie, sans que jamais il se soit mis en posture ni debuoir de s'y acheminer; ceste frasque (ainsi l'on a voulu la baptiser) a faict refroidir beaucoup de courages, qu'on avoit eu de la peine à réchauffer." Pourtant, Huygens est de nouveau prêt à reprendre la tentative, avec le même zèle; mais il ne s'en dissimule pas les difficultés: „*force nous est de represcher les paradoxes de cet Evangile tout de nouveau,*" et personne ne l'aide, sauf Boreel, homme très influent. A Boreel aussi, écrit Huygens, — et Diodati se conforma à cet avis — donnez un petit coup d'éperon: „*deux chevaux tireront mieulx le carosse qu'un seul.*" De son côté, il promet un concours énergique „*pour faire réussir une conception que je me représente si utile et d'un succès si indubitable*". Mais, cette fois encore, on n'aboutit pas. Le 15 juin 1640, Diodati écrit à Galilée qu'il n'a plus rien appris de Hollande. Les efforts de Huygens paraissent donc avoir échoué; puis la maladie et la mort de Galilée vinrent mettre fin, pour tout de bon, à la négociation. Quant à savoir si, dès cette époque, Galilée eût été en état d'approprier sa méthode, sous tous les rapports, par exemple en ce qui concerne le calcul des éphémérides, aux besoins de la navigation, c'est une question que je ne me hasarde pas à résoudre.

Arrivé à la fin de notre tâche, essayons de résumer en quelques mots l'impression reçue. Nous croyons que Constantijn Huygens ne saurait être rangé parmi les hommes spécialement aptes aux recherches originales. Aucun fait n'autorise à affirmer de lui — comme on peut hardiment le faire, par exemple, de Johan de Witt et du bourgmestre amsterdammois Hudde — que le labeur et les soucis de leur emploi ont seuls mis obstacle au plein développement de grandes dispositions pour les sciences exactes ou naturelles. Ce qui est indéniable, par contre, c'est le vif intérêt que lui inspiraient les travaux des autres et la pénétration qu'il apportait à

s'assimiler leurs idées. D'un regard attentif et vigilant il suivait le progrès qui de son temps s'accusait dans l'étude de la nature, et, pour venir en aide à ceux qui y prenaient une part active, aucune peine ne lui coûtait. C'était, pour terminer par un mot de lui-même, un homme „*amoureux de l'anatomie des choses*". [1])

ANNEXE I.

Etat de la correspondance aujourd'hui connue entre Constantijn Huygens et Descartes.

I.

Constantijn Huygens à Descartes.

1) 28 oct. 1635. *Lettres françaises.* T. I, p. 643.
2) 5 déc. 1635 „ T. I, p. 625.
3) 15 juin 1636 „ T. I, p. 715.
4) 5 janv. 1637 „ T. I, p 769.
5) 18 sept. 1637 „ T. I, p. 759.
6) 23 nov. 1637 „ T. I, p. 751.
7) 2 févr. 1638 „ T. I, p. 817.
8) 30 juill. 1638 „ T. I, p. 807.
9) 15 mai 1639 „ T. I, p. 915.
10) 28 mai 1639 „ T. I, p. 911.
11) 28 déc. 1639 „ T. I, p. 855 (imprimée dans *Versl. en Med., Afd. Natuurk.*, 3e Sér., T. III, 1887, p. 82).
12) 17 août 1640. *Lettres françaises.* T. I, p. 953 (impr. *ibid.*, p. 101).
13) 17 juill. 1641 „ T. II, p. 14.
14) 26 mai 1642 „ T. II, p. 93.
15) 6 juin 1643 „ T. II, p. 137.
16) 14 mars 1644 „ T. II, p. 225.
17) 7 juill. 1645 „ T. II, p. 247.

---

[1]) *Lettres françaises*, II, p. 247.

II.

Descartes à Constantijn Huygens.

1) 1 Nov. 1635. Foucher du Careil, *Oeuvres inédites* de Descartes, T. II, p, 227.
2) Déc. 1635. Cousin, *Oeuvres de Descartes*, T. VI, p. 323. Cette lettre est regardée par Cousin comme adressée à Pollot et écrite le 7 oct. 1637. Elle doit, toutefois, avoir été adressée à celui qui a dessiné l'hyperbole, c'est-à-dire à Huygens, et avoir été écrite entre déc. 1635 et juin 1636. Il se peut qu'on ait affaire à deux lettres écrites à la suite l'une de l'autre et que la première partie ne soit pas adressée à Huygens.
3) Mai 1637. Cousin, T. VI, p. 302. Placée par Cousin en Avril 1637. Elle a, évidemment, été écrite peu de temps après le décès (10 mai 1637) de la femme de Huygens.
4) 5 Oct. 1637. Cousin, T. VI, p. 329. La lettre originale est à Leide, *Bibliothèque de l'Université, collection Huygens*. Elle diffère très peu de la minute. Cousin donne l'adresse exacte et la date du 9 oct. 1637.
5) Janv. 1638. Cousin, T. VII, p. 410. D'après la conjecture de Cousin, elle serait du 18 févr. 1638. Il résulte toutefois du contenu, que la lettre du 2 févr. 1638 n'avait pas encore été reçue par Descartes.
6) Févr. 1638. Cousin, T. VII, p. 417. Placée par Cousin au 20 mars 1638.
7) Août 1638. Cousin, T. VIII, p. 53. La date est placée par Cousin au 25 août 1638. Il ne donne pas d'adresse.
8) Juill. 1638. Cousin, T. VIII, p. 294. Du 26 juill. 1640 suivant la conjecture de Cousin.
9) Août 1640, T. IX, p 118. Ni date ni adresse données par Cousin.

10) 11 Nov. 1640. Foucher du Careil, T. II, p. 234. Bien que Foucher du Careil regarde ce billet comme adressé à De Wilhem, il est certainement adressé à Huygens et du 11 nov. 1640. Dans une lettre au père Mersenne (qui, on va le voir, doit avoir été du 18 nov.) Descartes écrit: „*qu'il y avoit huit jours il avoit écrit les encloses pour luy estre adressées par M.* Zuylichem *avec sa métaphysique, mais celui-ci passa par icy il y a deux jours pour aller à Groningue, avec Monsieur le prince et les rapporta comme ne pouvant écrire en France de quelques semaines*" (Cousin, T. VIII, p. 397), et dans le *Dagboek* de Huygens on lit: „16 Nov. 1640. *Cum principe Hagâ Groningam proficiscor*". Les „*encloses*" étaient les lettres qu'on trouve dans Cousin, T. VIII, p. 387—396; „*l'écrit de métaphysique*" était „*Meditationes de primâ philosophiâ, ubi de Dei existentiâ et animae immortalitate*". Paris 1641, qui toutefois, à ce moment, n'avaient pas encore de titre spécial (voir Cousin, T. VIII, p. 395).

11) 12 Nov. 1640. Cousin, T. VIII, p. 422. L'original se trouve dans la collection de l'Anglais, M. Morrison. L'adresse et la date ont été conjecturées exactement (à un jour près) par Cousin. On a ici un exemple de deux minutes de lettres écrites à la suite l'une de l'autre.

12) Sept. ou Oct. 1642. Cousin, T. VIII, p. 632. Serait du 8 oct. 1642, suivant la conjecture de Cousin.

13) Févr. 1643. Cousin, T. IX, p. 87. Du 18 févr. 1843, suivant la conjecture de Cousin.

14) Mars (?) 1643. Cousin, T. IX, p. 120. La conjecture de Cousin, mars 1643, peut très bien être exacte.

15) Mai 1643. Cousin, T. X, p. 112. Cousin ne sait que dire ni du jour, ni de l'année. Il résulte toutefois de la réponse, qui est du 6 juin 1643, que la lettre doit être du mois de mai 1643, ou du commencement de juin.

Quant aux lettres suivantes de Descartes, il est incertain

si elles étaient, ou non, adressées à Huygens Cousin, T. VI, p. 313, 321; T. VIII, p. 59, 63, 147, 424.

En ce qui concerne toutefois la lettre T. VIII, p. 147, je la crois écrite à Van Schooten, à la fin de 1638. La lettre donnée par Foucher du Careil, T. II, p. 231, n'est bien certainement, pas adressée à Huygens. Elle est de l'année 1637.

III.

Quelques lettres touchant les relations entre Huygens et Descartes.

1) 7 avril 1632. Constantijn Huygens à J. Golius, concernant la première (?) rencontre avec Descartes. *Lettres latines, Académie royale des sciences.*

2) 23 mai 1632. Descartes à D. Le Leu de Wilhem, même sujet. Foucher du Careil, *Oeuvres inédites de* Descartes, T. II, p. 23.

3) 12 déc. 1633. Descartes à D. Le Leu de Wilhem. Opinion sur Huygens. Foucher du Careil, T. II, p. 6. *Une famille ou j'éntends qu'il n'y a personne qui ne participe aux rares et excellentes qualités qui sont particulièrement admirées de tous en Monsieur* de Zuilicom *vostre beau-frère.*

4) 6 avril 1635. Descartes à J. Golius. Opinion sur Huygens et concernant l'expérience dioptrique *Archives de l'Etat à la Haye, collection* Beeldsnijder van Voshol.

5) 30 juin 1638. Huygens à Heinsius. Transmission d'une demande de Descartes concernant le prêt de livres de la bibliothèque de Leide. *Lettres latines, Acad. royale des sciences.*

6) 22 juin 1641. De Wilhem à Constantijn Huygens. Proposition tendant à utiliser Descartes dans un litige que l'Etat avait à poursuivre. *Bibliothèque de l'Université de Leide, collection* Huygens. Il s'agit propablement de la même affaire dont il est question dans la lettre de Descartes du 1er janv. 1644, De Bude, *Lettres inédites de* Descartes, p. 26.

7) 5 juillet 1643. Constantijn Huygens à D. Le Leu de Wilhem. Conseils au sujet de la conduite à tenir par Descartes dans ses démêlés avec Voetius. *Lettres françaises*, II. p. 123.

8) 10 juillet 1643. Descartes à De Wilhem. Concerne la lettre précédente. Foucher du Careil, T. II, p. 26.

9) 10 juillet 1643. Descartes à de Wilhem. Même objet. Foucher du Careil, T. II, p. 28.

10) 30 août 1643. A. S. van Zurck à Constantijn Huygens. Sur Descartes. *Bibliothèque de l'université de Leide, collection* Huygens.

11) 2 juillet 1645. De Wilhem à Constantijn Huygens. Sur un ouvrage manuscrit de Descartes. *Bibliothèque de l'université de Leide, collection* Huygens.

12) 4 juillet 1645. De Wilhem à Constantijn Huygens. Même objet, même *collection.*

13) 4 août 1645. Descartes à De Wilhem. Sur une lettre de Huygens. Foucher du Careil, T. II, p. 32.

14) 26 juillet 1650. Constantijn Huygens à Chanut, ambassadeur de France en Suède. A la mémoire de Descartes. *Lettres françaises* II, p. 435.

ANNEXE II.

Sur la participation de Descartes à deux écrits parus sous le nom de Wassenaer.

Les deux lettres [1]) de Huygens à Descartes, qui traitent de la dispute entre Stampioen et Wassenaer, ont de la valeur pour la connaissance du rôle que Descartes joua dans cette controverse. Non seulement que, se rangeant du côté de Wassenaer, il dirigea la lutte jusque dans ses détails, mais

[1]) *Lettres françaises*, T. I, p. 855 et 953. On les trouve imprimées dans la Notice de M. Bierens de Haan, citée plus loin.

il doit même être regardé comme le véritable auteur d'une grande partie des deux écrits qui parurent sous le nom de Wassenaer. Sans nous engager dans l'historique du débat [1]), nous dirons quelques mots de la part que Descartes a eue aux écrits en question et nous essaierons de donner une idée de leur contenu.

En ce qui concerne le premier de ces écrits: „Jacobi à Wassenaer, *Aenmerckingen op den Nieuwen stelregel van* Johan Stampioen d'Jonge [2]) *Leyden, Jan Maire*, 1639", il donne d'abord une critique détaillée du livre, effectivement très stupide, de Stampioen, „*Algebra ofte nieuwen stel-regel, waerdoor alles gevonden wordt in de wiskonst dat vindbaar is* [3]), *'s-Gravenhage*, 1639" critique dans laquelle il est à chaque instant question de la *Géométrie* de Descartes; vient ensuite, p. 29—48, une partie dont le contenu essentiel se retrouve dans une lettre de Descartes, probablement à van Schooten, lettre donnée par Cousin T. VIII, p. 147—158, et à laquelle nous renvoyons le lecteur. *Tous* les arguments produits dans cette lettre sont, un à un, repris et développés, et lorsque, p. 46, l'auteur parle de la gageure proposée par Stampioen, il émet aussi un avis tout à fait conforme à celui de Descartes: „*si le seigneur* Stampioen *était assez hardi pour mettre ces cent ricksdalers entre les mains de personnes neutres, il est certain qu'il les perdrait*". Quant à savoir jusqu'à quel point Descartes est impliqué dans la suite de l'écrit, où sont annoncées une règle pour l'extraction de la racine cubique de $a + \sqrt{b}$ et la solution de deux problèmes jadis proposés par Stampioen

---

1) Cet historique a été écrit, très complètement, par M. Bierens de Haan (*Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wet.*, 3e sér., T. III, 1887, p. 69), à qui j'avais communiqué les données recueillies par moi au sujet de l'immixtion de Descartes.

2) C'est-à-dire: *Remarques sur le nouveau théorème de* Jean Stampioen le Jeune.

3) C'est-à-dire: *Algèbre ou nouveau théorème, par lequel on trouve en mathématiques tout ce qui est trouvable.*

mais qu'il est accusé de ne pouvoir résoudre lui-même, c'est une question que nous examinerons à propos du second des deux écrits portant le nom de Wassenaer.

A ce second écrit: *Den onwissen wiskonstenaer* J. J. Stampioenius *ontdeckt* [1]), *Johannes Maire,* 1640", Descartes a certainement eu une part encore plus large qu'au premier. Cela ressort non seulement de la correspondance de Descartes avec Huygens mais aussi d'une longue lettre de Descartes à Wassenaer, que j'ai trouvée au British Museum et qui sera reproduite à la fin de cette Annexe. Descartes écrit à Huygens: *„mes affaires domestiques m'appellent en France et si ie puis trouver commodité pour y aller dans cinq ou six semaines je me propose de faire le voyage, mais* Wassenaer *ne désire pas que je parte avant l'impression de ce que l'opiniâtreté de son adversaire l'a contraint d'écrire, et quoique ce soit une drogue dont je suis fort las, l'honneur toutefois ne me permet pas de de m'exempter d'en voir la fin, ni le service que je dois à ce pays d'en dissimuler la vérité. Vous la trouverez dans sa préface dont je lui ferai encore différer l'impression quinze jours, ou plus s'il est besoin, afin d'en atttendre votre jugement, s'il vous plaît me faire la faveur de me l'écrire, et il me servira de loi invariable*" [2]).

Bien que Descartes parle ici de *sa* préface (celle de Wassenaer), la réponse de Huygens montre que celui-ci, qui sans nul doute était au courant, regardait Descartes lui-même comme l'auteur de cette préface. Il écrit, en effet: *„venant de lire la preface qui se va publier soubs le nom de Wassenaer, elle me semble un discours veritable, judicieux et discret et portant des coups avec lesquels on prendra congé de bonne grace de ces petites noises; pour enfin ne respondre plus au fol selon sa folie; qui ne prendroit point de fin. J'estime que vous n'aurez pas voulu prendre la peine de l'escrire en flamen; et de là vous juge heureux d'avoir trouvé de si bons interprêtes, qui veritablement vous suivent de si bonne façon et en termes si propres, que la traduction*

1) C'est-à-dire: *Le faux mathématicien* J. J. Stampioenius *dénoncé.*

2) Cousin, T. VIII, p. 294.

seulement n'y paroist pas, qui n'est pas un don commun à touts Translateurs. Mr. van Surek *qui est poli en tout, vous y pourra avoir presté de sa diligence, qui que ce soit vous lui en avez un peu bien d'obligation*" [1]).

Si maintenant on ouvre l'„*Onwissen wiskonstenaer*", on n'y trouve pas de préface proprement dite, mais les 30 premières pages en tiennent lieu. Elles renferment un récit méthodique de la dispute, ainsi qu'une argumentation philosophique tendant à établir que l'autorité ne devrait pas laisser impunis ceux qui falsifient les mathématiques, vu qu'ils sont plus coupables que ceux qui falsifient les monnaies.

Après cette introduction, vient la règle, déjà annoncée dans le premier écrit, pour rechercher si la racine $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}}$ peut être mise sous la forme $c + \sqrt{d}$ (a, b, c, d étant des nombres entiers). Stampioen avait donné de ce problème, pour $n = 3$, une solution *très* défectueuse. La preuve que la solution exposée dans l'écrit qui nous occupe, solution exacte et ingénieuse, n'a pas été imaginée par Wassenaer, mais par Descartes, résulte de l'importante lettre de Descartes à Wassenaer dont il a déjà été question ci-dessus et qu'on trouvera plus loin. Descartes lui-même, au reste, n'a pas toujours fait mystère de la chose; dans une lettre à Mersenne, où la règle est également donnée, on lit, en effet: „*Quant aux règles pour tirer la racine cubique des binômes, il est certain que la première est tres fausse et impertinente, mais pour la dernière je ne craindrai pas de vous dire que c'est moi-même qui l'ai faite; de*

1) *Lettres françaises*, I, p. 953. La lettre est du 14 août 1640. On trouve la réponse de Descartes dans Cousin, T. IX, p 118. Deux sujets de la lettre de Huygens y sont touchés. A l'envoi de son „*Orgelgebruyck*" il est répondu par une critique de cet opuscule (voir plus haut, p. 444). La conjecture de Huygens, qui supposait le départ de Descartes en rapport avec „*le déplaisir que ce sot garçon* (Stampioen) *vous aura donné*", est contredite: „*Je ne suis pas d'humeur si déraisonable ni si tendre*". Quant à l'opinion de Huygens attribuant à Descartes la paternité de la préface, il n'en est dit mot. Cela peut bien passer, me semble-t-il, pour un assentiment!

même il est aisé de l'appliquer aux racines sursolides et autres à l'infini" [1]).

L'écrit se termine par la solution de deux problèmes antérieurement répandus parmi les mathématiciens par Stampioen, mais dont lui-même avait montré ne pouvoir se tirer que très mal. De ces solutions aussi, j'incline à attribuer la paternité à Descartes. Le premier problème [2]) avait été proposé dès 1634, et Stampioen, à ce qu'il rapporte lui-même, l'avait entre autres envoyé, par l'intermédiaire du recteur D. Beecman — bien connu comme ami de Descartes — à un certain „*Mathematicien.*" Celui-ci y avait répondu, *en français*, par la solution suivante:

„*Je trouve que la proportion qui est entre le moindre costé du Triangle A B C et le plus grand, est comme l'unité à l'une des deux racines qui peuvent estre tirées de cette aequation:* $4900\,x^6$ *aegual:* $- 4899\,x^5 + 2354\,x^4 + 16858\,x^3 + 9458\,x^2 + + 429\,x - 4900$".

Que ce „*Mathematicien*" n'était personne d'autre que Descartes, cela ne peut faire l'objet d'un doute [3]). Nous ignorons ce que Stampioen, au moment même, a répondu au sujet de cette solution; en tout cas, il n'a pas voulu en reconnaître l'exactitude, car il refuse encore de le faire en 1640, se couvrant d'un misérable prétexte. Ne pouvant nier que la solution ne soit exacte quand par *le plus grand côté* on entend le plus grand côté de l'angle droit, il s'obstine à appliquer ces mots à l'hypothénuse.

Il est probable que dans cette ancienne histoire doit être

---

1) Cousin, T. VIII, p. 350.

2) Dans un triangle rectangle *A B C* (rectangle en *A*) est inscrit un carré *D E F G* (*D* et *E* resp. sur *A B* et *A C*, *F* et *G* sur *B C*). A l'intérieur des triangles *B D F* et *E G C* sont tracés des cercles inscrits, qui découpent sur les lignes *B E* et *D C* des cordes données 5 et 7. Trouver les côtés du triangle.

3) D'autant moins, que Wassenaer montre, plus tard, avoir connaissance de l'envoi de cette solution. V. les „*Aenmerckingen*", p. 57 et 58.

cherchée l'une des raisons qui déterminaient Descartes, dès le début, à prendre avec tant de zèle le parti de Wassenaer et à poursuivre Stampioen si opiniâtrement qu'il n'eut de repos qu'après l'avoir forcé à une gageure et lui avoir causé une perte pécuniaire assez sensible [1]).

En ce qui concerne le second problème, nous savons tout au moins que Descartes s'en est également occupé, car, plus tard, il écrit à un inconnu (Cousin, T. IX, p. 141): „*mais pour remarquer l'industrie de bien démêler les équations, je n'en sache point de plus propre que celle des trois bâtons, dont la solution n'a peût être point encore passé en Bourgogne. Tres baculi erecti sunt at perpendiculum, in horizontali plano, ex punctis A, B, C. Et baculus A est* 6 *pedum, B* 18 *pedum, C* 8 *pedum. Et linea A B est* 33 *pedum; et una atque eadem die extremitas umbrae solaris quam facit baculus A, transit per puncta B et C, extremitas umbrae baculi B per A et C. Et ex consequenti etiam*

[1]) A quel point Descartes s'intéressait à cette gageure, on peut en juger par diverses circonstances C'est lui qui invoque l'intervention de Huygens lorsque Stampioen cherche à se dérober par toutes sortes de prétextes à la signature des conditions du défi (voir la lettre de Huyghens du 28 déc. 1639, *Lettres françaises*, I, p. 855); lui qui insiste auprès d'un des arbitres pour qu'on hâte la décision (Foucher du Careil, *Oeuvre inédites de* Descartes, T. II, p.8), lui encore qui veille à ce que la somme perdue par Stampioen au profit des pauvres soit réellement payée. Il n'était pas agréable, évidemment, d'avoir Descartes pour ennemi!

Au reste, déjà avant cette dispute, des relations paraissent avoir existé entre Wassenaer et Descartes. Lorsque celui-ci, en mai 1638, écrit à Mersenne: „*En fermant ce paquet je reçois une lettre d'Utrecht de laquelle je vous envoie une partie, afin que vous puissiez voir par là, qu'il y en a qui peuvent entendre ma geométrie*", on peut croire, sans trop s'aventurer, qu'il s'agit de Wassenaer, lequel demeurait à Utrecht. La découverte qu'un jeune mathématicien s'était familiarisé avec sa Géométrie, qui venait à peine de paraître, doit certainement avoir impressioné Descartes, et nous avons donc là une explication de plus de la passion avec laquelle il se mêla à la dispute, passion qui paraît aussi avoir étonné Huygens, car celui-ci écrit: »*Si vous continuez à me recognoistre capable de vous servir en cette brouillerie,.... je suis tres content de vous y tesmoigner comme en tout autre chose plus digne de vous.*"

baculi C par A et B. Quaeritur in quanam poli altitudine, et qua die anni id contingat; et supponimus illas umbras describere accurate conicas sectiones, ut quaestio sit geometrica, non mechanica",

La solution de ce problème, — ainsi que la règle pour la réduction de $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$, qui, nous l'avons vu, était certainement de Descartes, — fut plus tard reproduite par Van Schooten d'après l'*Onwissen Wiskonstenaer* de Wassenaer, et placée comme *addimentum* à la suite de ses Commentaires, dans la seconde édition (1649) de la *Geometria à* Renato Descartes. C'est là, semble-t-il, un nouveau motif de croire que Descartes était l'auteur de la solution. Il doit encore y avoir eu, à ce moment, des raisons pour ne pas en convenir ouvertement. On se croyait lié envers Wassenaer, ou bien l'on ne voulait pas donner à Stampioen la satisfaction d'avoir été battu par un adversaire de cette taille.

Lettre de Descartes à Wassenaer.

(Nous donnons en note la traduction des parties hollandaises de cette lettre).

Monsieur J. A. WAESSENAER.

Ik bidde u willen drie brieven schrijven, 2 *aen de twee professors matheseos van Leyden Mynheer* Golius *en Mynheer* Schooten, *en de derde aen de Heer* Berlekom, *om haer vriendeliic te bidden haer opinie willen binnen een maend schrifteliic geven, ick sende u de copie van de brief aen de Heer* Berlecom *so als ick meint dat goed sal wesen dat ghy schryve, ghy mach de twee andere van u selfs wel maecken, ende ick bidde u dese drie brieven met u eygen handt geschreven ende onderteyckent, doch ongesloten toekomende diensdag wesende den* 1 *Feb. nieuwen stijle willen bestellen aen Mynheer* van Hoogelande, *welcke sal bij die van de Heer* Berlicom *alle schriften daertoe hoorende bysetten ende hem door een bekende schipper senden. ende om u de moeyte van ons leste schriift copieeren te spaeren ick hebbe over acht daegen het selfde te Leyden*

gesonden om te laeten lesen aen HH. Golius *en* Schooten, *so dat men sal hetselfde ooc aen de Heer* Berlicom *senden. ghij moet die brieven also schriiven indien ghy binnen maendag geen schriift van* St[ampioen] *ontfang, geliic wij gelooven dat hy sal niet veel te schriiven hebben om te bewiisen dat siin regel goed is, maer indien ghy iet van hem ontfang aen 't welc men moet antwoorden soo moet ghy hetselfde hier senden çito cito. Ick sal ooc geerne hebben u solutie op de twee questie van* St[ampioen] *so haest als sie gereed siin, ende ick sal hier byvoegen het bewiis van onsen regel om den teerling wortel te trecken uyt tweenaemige getallen.*

([*Ick laet u ooc de sorge om Mynheer* Schotanus *te bidden siine sententie te willen geven etc. Ende ghy moet alle de arbiters bidden te antwoorden* [*op de*] *selfde* 3 *pointen die siin in de* [*brief*] *aen de Heer* Berlicom)] [1]).

---

1) Monsieur J. A. WASSENAER.

Je vous prie de vouloir écrire trois lettres, 2 aux deux professeurs de mathématiques de Leide, Monsieur Golius et Monsieur Schooten, et la troisième à Monsieur Berlekom, pour les prier poliment de vouloir donner leur opinion d'ici à un mois; je vous envoie la copie de la lettre à Monsieur Berlecom telle que je crois bon que vous l'écriviez, les deux autres vouz pouvez bien les faire vous-même, et je vous prie de vouloir expédier ces trois lettres, écrites et signées de votre propre main, mais non fermées, mardi prochain 1er févr. nouveau style, à Monsieur Van Hoogelande, qui à celle pour Monsieur Berlicom joindra tous les écrits qui s'y rapportent. Afin de vous épargner la peine de copier notre dernier écrit, je l'ai envoyé il y a huit jours à Leide, pour le laisser lire à MM. Golius et Schooten, de sorte qu'on l'enverra aussi à Monsieur Berlicom. Vous devez donc écrire ces lettres si d'ici à lundi vous ne recevez aucun écrit de St[ampioen], comme nous croyons qu'il n'aura pas beaucoup à écrire pour prouver que sa règle est bonne; mais si vous recevez de lui quelque chose à quoi on doive répondre, envoyez-le ici cito cito. Je recevrai volontiers aussi votre solution des deux questions de St[ampioen] dès qu'elles seront prêtes, et j'ajouterai ici la démonstration de notre règle pour tirer la racine cubique des nombres binomiaux.

(Je vous laisse aussi le soin de prier Monsieur Schotanus de vouloir donner sa sentence etc. Et vouz devez prier tous les arbitres de répondre [aux] mêmes 3 points qui sont dans la [lettre] à Monsieur Berlicom).

Premierement ie prouue que lorsqu'on a soustrait les quarrez des parties l'un de l'autre, si ce qui reste, n'est pas un nombre cubique la racine cherchee, n'est pas un simple binome en faisant voir que toutes et quantes fois que cete racine est un simple binome la difference qui est entre les quarrez des parties de son cube est un nombre cubique. Soit $x + \sqrt{y}$ *la racine cherchée le cube donné est egal a* $x^3 + 3\,x\,y + 3\,x\,x\sqrt{y} + y\sqrt{y}$ *et le quarré de* $x^3 + 3xy$ *qui est la partie rationelle de ce cube est* $x^6 + 6x^4y + 9xx\,yy$ *puis le quarré de l'autre partie* $3xx\sqrt{y} + y\sqrt{y}$ *est* $9x^4y + 6xxyy + y^3$, *et ostant ces quarrez l'un de l'autre il reste* $x^6 - 3x^4y + 3xxyy - y^3$ *ou bien* $-x^6 + 3x^4y - 3xxyy + y^3$ *qui est nombre cubique ainsy qu'il faloit demonstrer.*

Et il est a noter que la racine cubique de ce nombre est $xx - y$ *ou bien* $y - xx$ *c'est a dire la difference qui est entre les quarrez des parties de la racine* $x + \sqrt{y}$, *en sorte que sans connoistre cete racine si on me donne seulement son cube qui ie nom̄e* $a + \sqrt{b}$ *ie tire la racine cubique de* $a\,a - b$ *ou* $b - a\,a$ *que ie nom̄e* c *et i'ay* c *egal à* $xx - y$ *ou bien* $y - xx$.

Or la cause pourquoy, lorsque apres auoir soustrait les quarrez des parties l'un de l'autre on trouue que le reste n'est pas nombre cubique, ie fais multiplier le cube donné par ce reste, est affin d'auoir un binome qui soit tel que la difference des quarrez de ses parties soit un nombre cubique, et ainsy que si sa racine est un binome ce ne soit qu'un simple binome ce que ie demonstre en cete sorte. Soit $a + \sqrt{b}$ *le cube donné et que* $a\,a - b$ *ou* $b - a\,a$ *ne soit pas nombre cubique, ie multiplie* $a + \sqrt{b}$ *par* $a\,a - b$ *il vient* $a^3 - a\,b + a\,a\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ *et du quarré de* $a^3 - a\,b$ *qui est* $a^6 - 2\,a^4b + a\,a\,b\,b$ *ayant soustrait le quarré de* $aa\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ *qui est* $a^4\,b - 2\,a\,a\,b\,b + b^3$ *il vient* $a^6 - 3\,a^4\,b + 4\,aabb - b^3$ *qui est nostre cubique ainsi qu'il faloit demonstrer et sa racine est* $a\,a - b$.

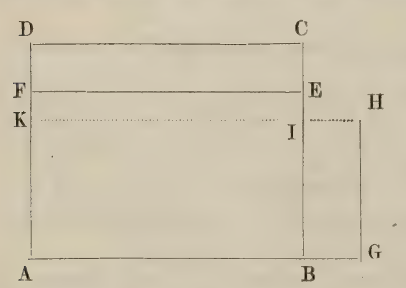
Maintenant pour venir a la demonstration de la regle ie prens $a + \sqrt{b}$ *pour le binome donné, et ie suppose que la racine cubique de* $a\,a - b$ *se peut tirer et ie la nomme* c, *puis posant* $x + \sqrt{y}$

pour la racine cubique de a + $\sqrt{b}$, *J'ay son cube* $x^3 + 3xy + 3xx\sqrt{y} + y\sqrt{y} \propto a + \sqrt{b}$ *et par consequent la partie rationelle de ce cube* $x^3 + 3xy \propto a$. *Et pourceque* c *est egal à* $xx - y$ *ainsy qu'il a esté dit cy devant iày* $y \propto xx - c$ *et* $3xy \propto 3x^3 - 3cx$, *a quoy adioustant* x^3 *i'ay* $4x^3 - 3cx \propto a$ *ou bien* $4x^3 \propto 3cx + a$; *ou bien* $8x^3 \propto 6cx + 2a$ *et faisant* $z \propto 2x$ *iay* $z^3 \propto 3cz + 2a$. *Or si la racine de cete de*[*uxième*] *equation, n'est pas un nombre rationel il est evident que la racine cubique* $a + \sqrt{b}$ *ne peut estre exprime par aucun binome, et si elle est nombre rationel ce doit estre necessairement un nombre entier a cause que* 3 c *et* 2 a *sont nombres entiers. Et par consequent* x *qui est la moitié de* z *est necessairement aussi nombre entier ou la moitié d'un nombre entier.*

De plus posant n *pour toute racine cubique de* $a + \sqrt{b}$ *et ayant* c *pour la difference qui est entre les quarrez de ses parties, i'ay* $\frac{1}{2}n + \frac{c}{2n}$ *pour la plus grande de ces parties et* $\frac{1}{2}n - \frac{c}{2n}$ *pour la moindre car le quarré de* $\frac{1}{2}n - \frac{c}{2n}$ *qui est* $\frac{1}{4}nn - \frac{1}{2}c + \frac{cc}{4nn}$ *estant osté du quarré de* $\frac{1}{2}n + \frac{c}{2n}$ *qui est* $\frac{1}{4}nn + \frac{1}{2}c + \frac{cc}{4nn}$ *il reste* c *et* $n + \frac{c}{n}$ *est egal a* z. *Mais pourceque le nombre* n *m'est inconnu et est le binome que ie doy trouuer, la principale subtilité de la regle consiste en ce que au lieu de* n *ie prens une racine cubique rationelle que ie nommeray icy* m *un peu plus grande que* n *mais qui ne l'excède pas de* $\frac{1}{2}$, *et que à* m *i'adiouste* c *divisé par ce mesme* m *car d'autant l'exces de* $\frac{c}{n}$ *par dessus* $\frac{c}{m}$ *est tousiours moindre que celuy de* m *par dessus* n *il est certain que* $m + \frac{c}{m}$ *est un nombre rationel plus grand que* z *d'une quantité qui est moindre qu'une unité, et ainsy que* z *ou bien* $n + \frac{c}{n}$ *estant necessairement un nombre entier en cas que la racine cherchée soit un binome, ce nombre entier est le plus grand qui soit*

compris dans le nombre rompu $m + \frac{c}{m}$. *Ensuite de qu[oi] tout le reste est clair, car ayant ainsy trouué le nombre qui doit estre égal à* z, *pour scauoir, si la racine de* $z^3 \propto 3cz + 2a$ *se peut tirer ie divise par ce nombre het dobbel van 't ledige deel,* [1]) *c'est a dire* 2 a *tot het toekomende ick [voege]* [2]) 3 c *et si* $3c + \frac{2a}{z}$ *n'est pas égal à* z z *il est evident que le nombre pris pour* z *ne luy est pas égal et ainsy que la racine de* $z^3 \propto 3cz + 2a$ *n'est pas rationelle, mais s'il est egal la moitié de* z *est* x *l'une des parties de la racine cherchée, du quarré de laquelle ostant* c *iay* y *qui est le quarre de l'autre partie. Et en tout cecy i'ay supposé* a *plus grand que* $\sqrt{b}$ *ensuite de quoy* x *est aussy plus grand que* $\sqrt{y}$ *mais quand* a *est moindre que* $\sqrt{b}$ *il y a si peu de changement que ce n'est pas la peine de l'escrire.*

Il reste seulement encore icy a prouuer que l'excez de $\frac{c}{n}$ *par dessus* $\frac{c}{m}$ *est moindre que celuy de* m *par dessus* n, *et pour ce faire ie prens* A B *égal à* n *dont le quarré* A B C D *est necessairement plus grand que* c, *pourceque* c *n'est que la difference qui est entre les quarrez des parties de* n. *Je prens donc le rectangle* A B E F *pour* c *et ainsy* A F *est* $\frac{c}{n}$ *puis ie prens* A G *pour* m *en sorte que* B G *est moindre que* $\frac{1}{2}$ *et faisant* A G H K *egal à* c *le rectangle* B G H J *est egal au rectangle* I E F K *et pour ce que* J K *est plus grand que* J B, F K *est moindre que* B G *et ainsy* A K *qui est* $\frac{c}{m}$



[1]) .... le double de la partie rationnelle....

[2]) .... à ce qui vient je [ajoute] ....

est moindre que A F *ou* $\frac{c}{n}$ *d'une quantité moindre que celle dont* m *surpasse* n, *qui est tout ce qu'il falloit demonstrer.*

[1]) *Ick sal hier nogh byvoegen een generael regel om allerley andere wortels te trecken uyt binomische getallen.*

---

[1]) J'ajouterai encore ici une règle générale pour tirer toutes sortes d'autres racines de nombres binomiaux.

Préparation.

Soustrayez l'un de l'autre les carrés des parties et tirez la racine du reste, s'il est un nombre rationnel, mais s'il est un nombre irrationnel multipliez le binôme donné par ce reste quand vous voulez tirer la racine cubique, et par le carré de ce reste quand vous voulez tirer la racine sursolide, et par le cube de ce reste quand vous voulez tirer la racine *B* sursolide, et ainsi de suite pour les autres.

Règle.

Tirez du binôme entier une racine rationnelle un peu plus grande que la vraie mais qui ne l'excède pas de un demi, ajoutez-y la racine de la différence entre les carrés des parties divisée par cette même racine rationnelle, si la partie rationnelle du binôme donné est plus grande que l'autre partie, mais si elle plus petite soustrayez au lieu d'ajouter. La moitié du plus grand nombre entier compris dans cet agrégat, ou dans ce reste, est la partie rationnelle de la racine, du carré de laquelle soustrayez ou au carré de laquelle ajoutez la racine de la différence entre les carrés des parties, et vouz aurez le carré de l'autre partie. Bien entendu quand la racine est un nombre binomial, ce qu'on peut toujours savoir par la multiplication du binôme trouvé, car ce qu'on obtient doit être égal au nombre donné ou autrement la racine n'est pas un binôme.

Remarquez que partout où je parle ici de la racine sans dire quelle racine c'est, j'entends la racine sursolide quand je veux tirer la racine sursolide, et ainsi des autres, mais vous devez arranger tout ceci un peu mieux que je ne l'ai écrit et ajouter deux ou 3 petits exemples. Je suis

Votre ami et dévoué servitenr
DESCARTES.

le premier Févr. 1640.

A monsieur
monsieur J. A. WASSENAER.
Arpenteur demeurant
à Claerenbergh
près d'Utrecht.

port payé
jusqu'à Amsterdam.

Bereydinge.

Treckt de quadraeten der deelen van malkanderen en de wortel der reste, indien sie een rationael getal is, maer indien sie is een surdische getal so menichvuldig het gegeven binomium door 't selfde reste als ghy den cubicwortel wilt trecken, ende door het quadraet van 't zelfde reste als ghy wil den sursolid wortel trecken, ende door den cubus van 't zelfde reste als ghy wil den B sursolid wortel trecken ende so voorts van de andere.

Regel.

Treckt een rationael wortel uyt het heele binomium wat grooter als de waere is dat geen helfte en scheele, aen hem addeert den wortel van 't onderscheyt tusschen de quadraeten der deelen gedivideert door den selfden rationael wortel, als het ledige deel van 't gegeven binomium is grooter als het ander deel, maer als 't kleinder is substraheert denselfden. De helfte van 't grootste heele getal begrepen in dat aggregat, of in die reste is het ledige deel van de wortel, uyt wiens quadraet substraheert of aen 't selfde addeert de wortel van 't onderscheyt tusschen de quadraten der deelen, ende komt het quadraet van 't ander deel. Wel verstaende als de wortel een binomiale getal is 't welc men kan altiid weeten door de multiplicatie van 't gevonden binomium, want het komende moet wesen geliic het gegeven getal of anders de wortel is geen binomium.

Merckt dat hier overal als ik spreek van de wortel sonder te seggen wat wortel is ick verstae den sursolid wortel, als ick wil den sursolid wortel trecken, ende alsoo van de andre, maer ghy moet dit alles wat beter schicken als ick geschreven hebbe ende twee of 3 kleine exempels byvoegen. Ick ben

UE. zeer dienstwilligen Vriendt

DESCARTES.

den eersten Feb. 1640.

A monsieur

monsieur J. A. WASSENAER.

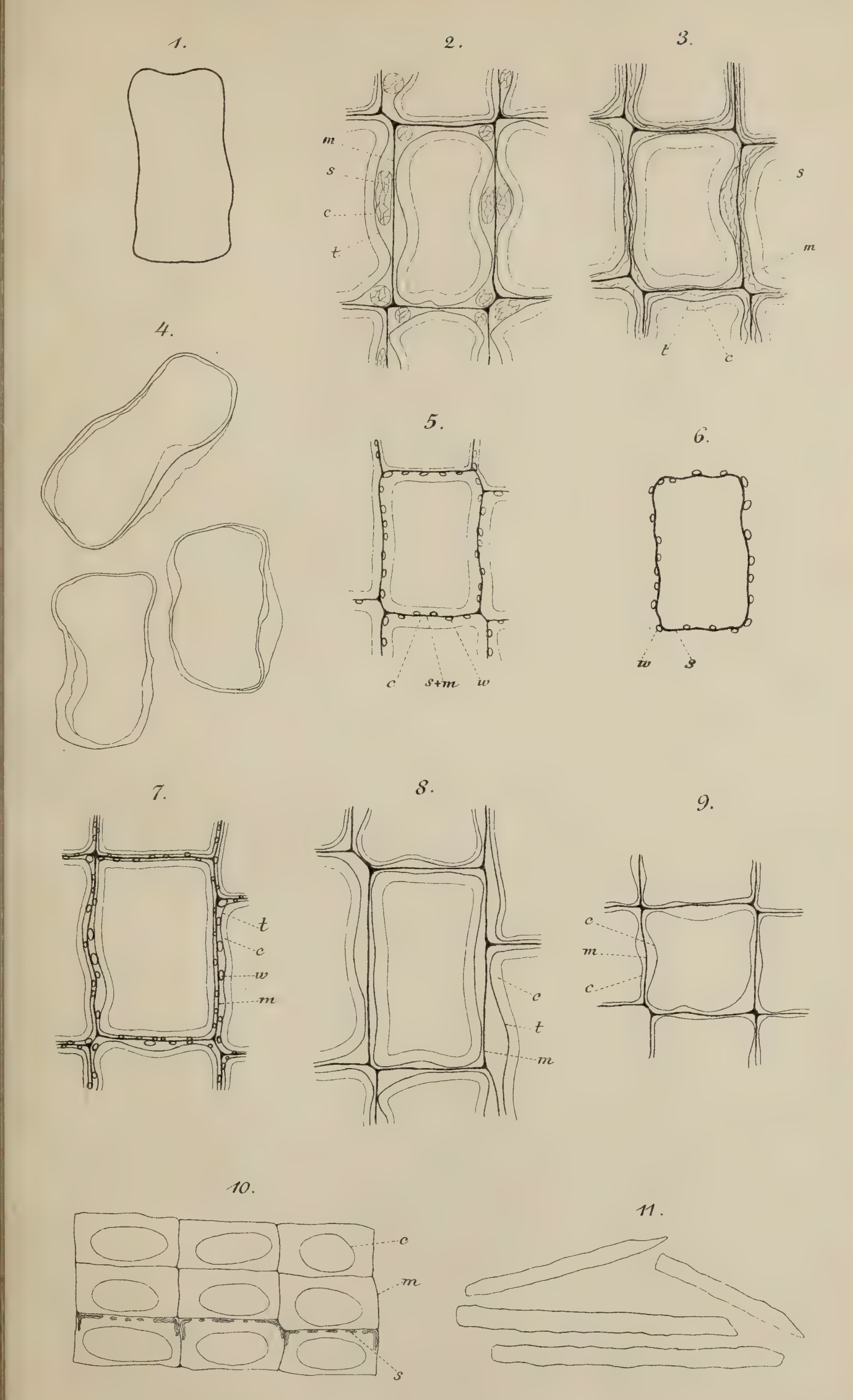
Landmeter woonende

voor Claerenbergh

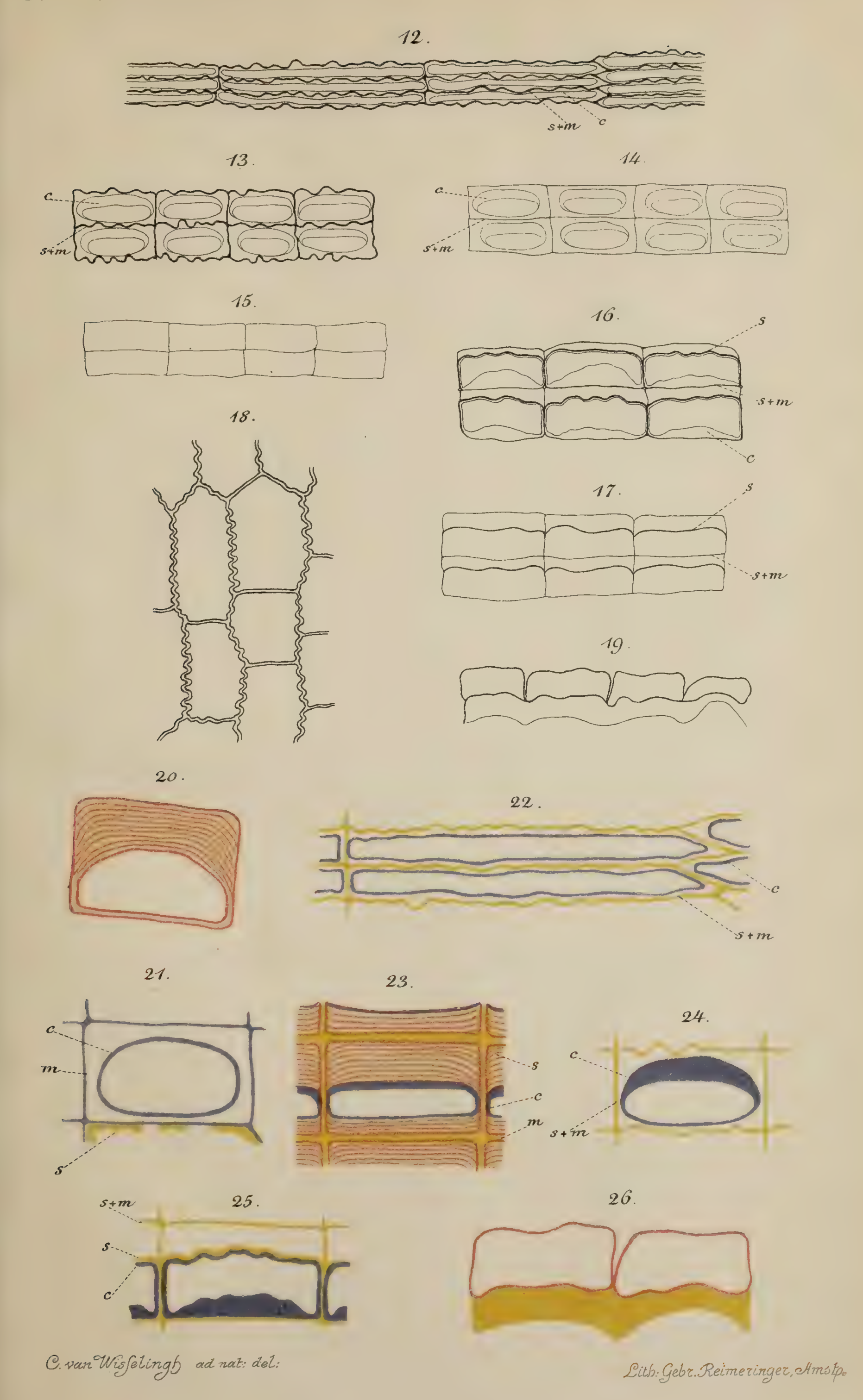
tot Utrecht.,

voort is betaelt

tot Amsterdam

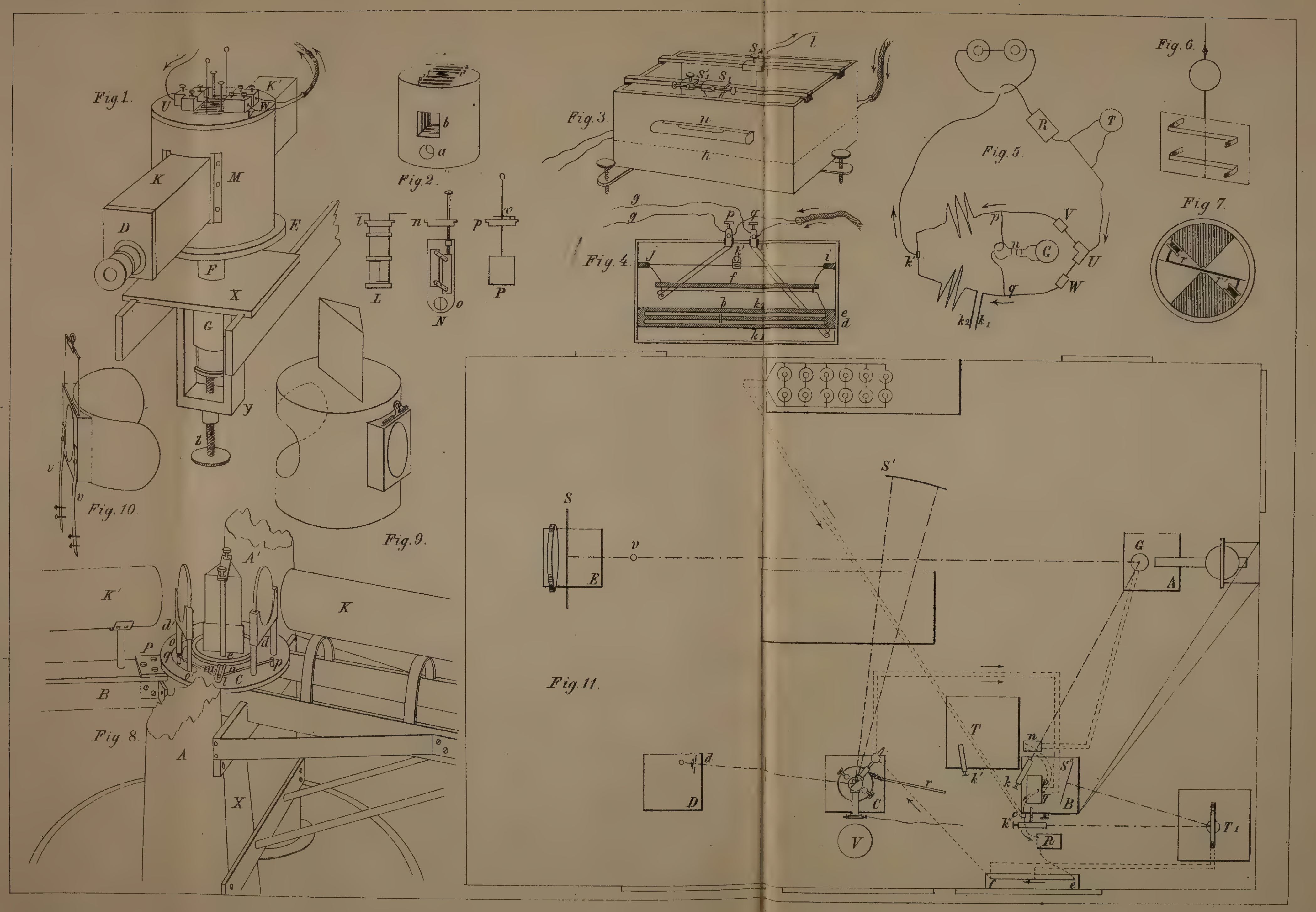


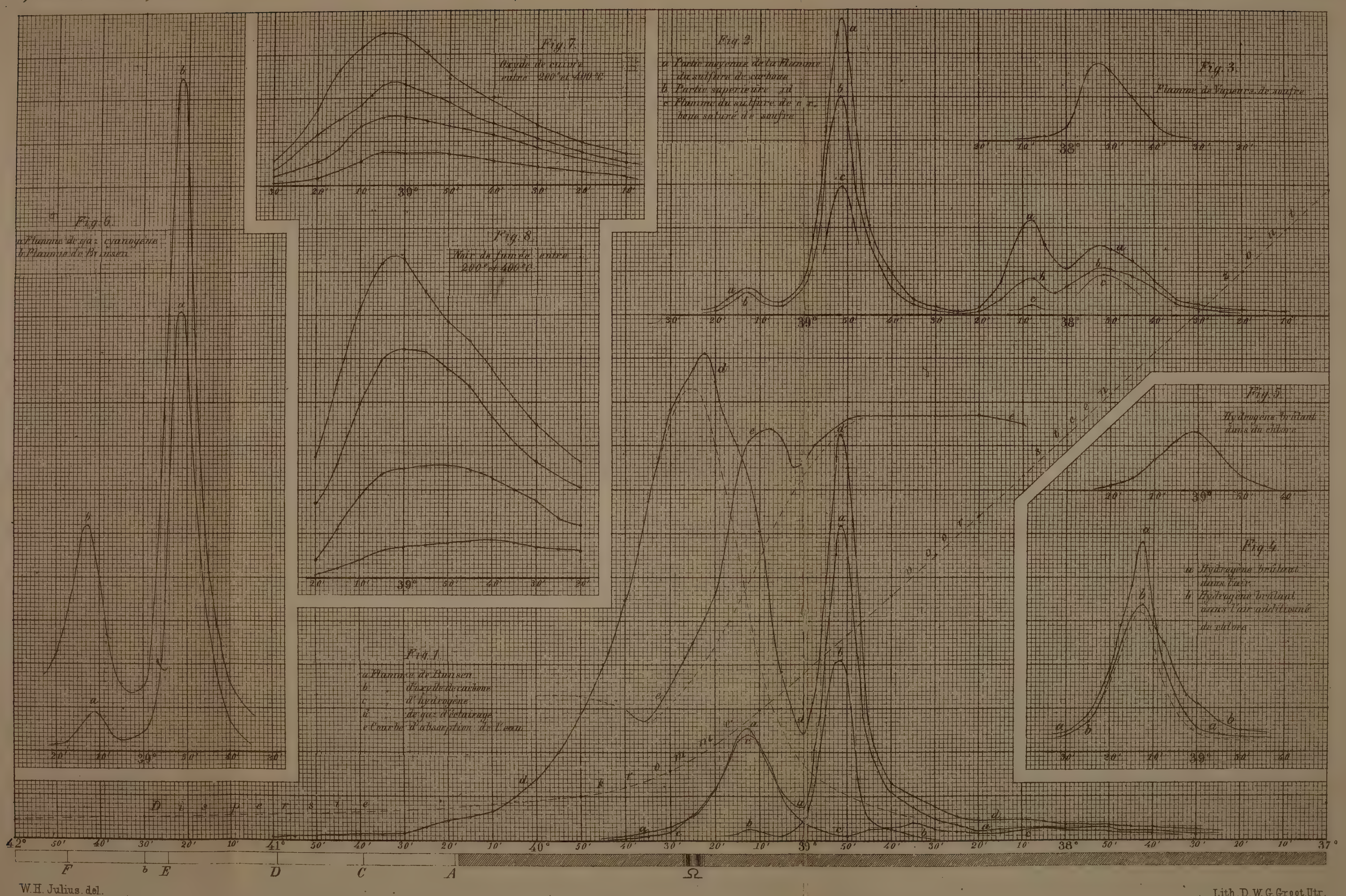
C. van Wisselingh ad nat: del: Lith. Gebr. Reumesinger. Amst.



C. van Wisselingh ad nat: del:

Lith: Gebr. Reimeringer, Amstд.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.


Fig. 1.
a Flamme de Bunsen
b " d'oxyde de carbone
c " d'hydrogène
d " de gaz d'éclairage
e Courbe d'absorption de l'eau
Fig. 2.
a Partie moyenne de la Flamme du sulfure de carbone
b Partie supérieure id
c Flamme du sulfure de carbone saturé de soufre
Fig. 3.
Flamme de Vapeurs de soufre
Fig. 4.
a Hydrogène brûlant dans l'air
b Hydrogène brûlant dans l'air additionné de chlore
Fig. 5.
Hydrogène brûlant dans du chlore
Fig. 6.
a Flamme de gaz cyanogène
b Flamme de Bunsen
Fig. 7.
Oxyde de cuivre entre 200° et 400° C
Fig. 8.
Noir de fumée entre 200° et 400° C
Dispersie
42° 41° 40° 39° 38° 37°
F b E D C A Ω



